# Tartalom

# XLIII. verseny 2013–2014.

## Feladatok

**5. osztály** — **Megyei forduló**

1. Marcinak hétszer annyi pénze van, mint Gergőnek. Ha Marci adna 65 Ft-ot Gergőnek, akkor már csak kétszer annyi pénze lenne, mint Gergőnek. Hány forintja van Marcinak és Gergőnek együtt?

2. Egy négyjegyű számhoz hozzáadtuk az utolsó három jegyéből képzett számot, majd az utolsó két jegyéből képzettet, végül az utolsó jegyét. Így eredményül 3042-őt kaptunk. Mi lehetett az eredeti négyjegyű szám?

3. Képzeld el, hogy leírtuk a teljes szorzótáblát $1 \cdot 1 = 1$-től $10 \cdot 10 = 100$ -ig. Tehát 100 darab szorzást írtunk le. Mivel egyenlő a kapott szorzatok összege? Számolj minél ötletesebben! (Neked nem kell a teljes szorzótáblát leírnod, csak ha nagyon akarod.)

4. Egy kocka minden élét 3 egyenlő részre osztottuk. Minden csúcsnál kiválasztottuk azt a 3 harmadoló pontot, amely a legközelebb van a kiválasztott csúcshoz, majd ezeken keresztül egy síkkal levágtuk a kocka „sarkait”. A levágott testeknek négy csúcsa van, a nevük tetraéder (háromszög alapú gúla, négylapú test). A nyolc levágás után megmaradt testnek hány éle, csúcsa, lapja van? Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek a határoló lapok?

5. Hány olyan háromjegyű szám van, amely számjegyei között van páros és páratlan számjegy is?

**6. osztály** **Megyei forduló**

1. Ismerkedj a 100 tulajdonságaival!
I.) Állítsd elő a 100-at a, 2, b, 3, c, 4, d, 5 négyzetszám összegeként! Egy-egy négyzetszámot legfeljebb kétszer használhatsz!
II.) Állítsd elő a 100-at köbszámok összegeként! Egy-egy köbszámot legfeljebb kétszer használhatsz!
Mindegyik feladatrészre egy-egy megoldást keress!
*Megjegyzés:* Legyen $n \geq 1$ természetes szám. Ekkor $n^2$-et négyzetszámnak, $n^3$-t köbszámnak mondjuk, ahol $n^2 = n \cdot n$ és $n^3 = n \cdot n \cdot n$.

2. Egy régi számlán ez áll:
237 darab (a termék neve olvashatatlan), az egységár *1* Ft ** fillér, fizetendő végösszeg 7***0 Ft 65 fillér.
A *-ok helyén álló számjegyek olvashatatlanok. Minden csillag egy számjegyet jelöl.
Számítsd ki a hiányzó számjegyeket! (1 Ft = 100 fillér)

3. Az $ABCD$ négyzet oldalainak hossza nyolc egység. Az $AB$ oldalon levő $P$ pont öt egység távolságra van az $A$ ponttól, a $BC$ oldalon levő $R$ pont két egység távolságra van a $C$ ponttól, míg a négyzet belsejében levő $Q$ pont a $CD$ és $AD$ oldalaktól is egy egység távolságra van. Számítsd ki a $PQR$ háromszög területét!

4. Tibi és Kati testvérek. A szüleik télre kabátot, sapkát és nadrágot vettek a gyerekeknek. A Tibi ruháinak mindegyike 50 %-kal drágább volt, mint Kati megfelelő ruhája. Tibi kabátja 10-szer annyiba került, mint a sapkája és háromszor annyi volt, mint Kati nadrágja és sapkája együtt. Mennyibe kerültek az egyes ruhadarabok, ha a szülők 75 ezer forintot fizettek összesen a hat ruhadarabért?

5. Hány darab 45-tel osztható $\overline{abcba}$ alakú ötjegyű szám van, ahol $a$, $b$ és $c$ különböző számjegyeket jelöl?

7. osztály

Megyei forduló

1. Alfa tanár úr 5 tanulót vizsgáztatott matematikából. Az elért pontszámokat *véletlen* sorrendben írta egy papírra, majd minden leírt pontszám után kiszámolta a papíron lévő számok számtani közepét (átlagát). Alfa tanár úr rájött, hogy minden egyes leírt szám után az átlag egy egész szám. A diákok pontszámai *növekvő* sorrendben a következők voltak: 71, 76, 80, 82 és 91. Milyen sorrendben jegyezhette le a számokat Alfa tanár úr?

2. Az 1 számlálójú törteket törzstörteknek nevezzük. Figyeld meg a következő törzstörtekre bontást: $\frac{19}{20} = \frac{10+5+4}{20} = \frac{10}{20} + \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$. Tehát $\frac{19}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$, s ezek különböző törzstörtek. Bontsd fel különböző törzstörtek összegére a következő törteket: $\frac{19}{24}$; $\frac{29}{48}$; $\frac{21}{25}$; $\frac{6}{7}$!

3. Melyek azok a háromjegyű számok, amelyek egyenlők a számjegyeik faktoriálisainak összegével? ($n$! olvasd n faktoriális! Az $n$ szám faktoriálisának nevezzük az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ szorzatot, tehát szavakkal elmondva $n$! jelenti az első $n$ pozitív egész szám szorzatát. Pl.: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, de $0! = 1$ és $1! = 1$)

4. Hány olyan nem üres részhalmaza van az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$ halmaznak, amelyben az elemek szorzata 5-re végződik? (Az egyelemű halmazban az elemek szorzata maga az elem.)

5. Egy téglalap egyik oldala a másik oldal ötszöröse. A téglalap szögfelezői által meghatározott négyszög területe 32 cm$^2$. Mekkora a téglalap területe?

8. osztály — Megyei forduló

1. Az apa, az anya és a három lányuk együtt 118 évesek. Az anya 10 évvel idősebb, mint a három lány együtt. A szülők életkora közötti különbség éppen a legkisebb lány életkorával egyenlő. Az egyik lány 2 évvel fiatalabb, mint a másik és ugyanannyival idősebb a harmadiknál. Hány évesek a szülők?

2. Igazoljátok, hogy egy olyan négyjegyű természetes szám, amelynek két-két számjegye azonos, nem lehet prímszám (törzsszám)!

3. Az $ABC$ derékszögű háromszög átfogója $AB$, a $CAB$ szög 60 fokos. A $C$-ből induló magasság talppontja $D$. Az $ADC$ háromszögben a $D$-ből induló magasság talppontja $E$, a $CDB$-ben az egyik magasság $DF$. A $DFB$ háromszög $F$-ből induló magassága $FH$. Igazoljátok, hogy $\overline{HB} = \overline{HA} + \overline{AE}$ !

4. Hány olyan konvex négyszög, ötszög, hatszög van, amelynek három egymás után következő csúcsa $A(0;4)$, $B(4;4)$ és $C(4;0)$ koordinátájú pont, és többi csúcsának koordinátái is nem negatív egész számok? (A konvex sokszög minden belső szöge 180 foknál kisebb.)

5. Tamás elfelejtette a vidéki barátja vezetékes telefonszámát. A következőkre emlékszik: balról számítva az első számjegye 5, a szám hatjegyű, páros, továbbá 4- gyel, 5-tel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel és 13-mal osztva ugyanazt a nullától különböző maradékot adja. Mi volt az elfelejtett telefonszám?

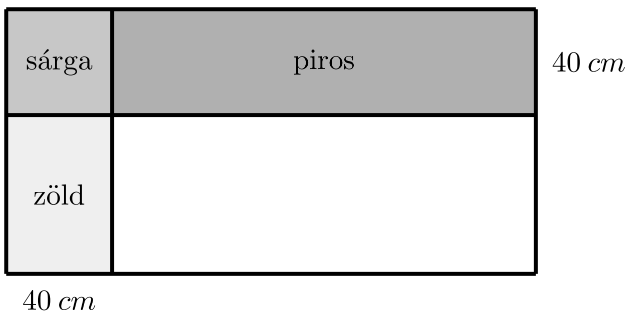
**5. osztály, 1. nap** **Országos döntő**

1. Egy osztási műveletben az osztandó és az osztó összege 2289. A hányados 17, a maradék 111. Határozd meg az osztandót és az osztót!

2. Domi néhány gyümölcs súlyát hasonlította össze egy mérlegen. 2 alma egyensúlyt tartott 3 körtével, 1 barack pedig 3 szilvával. Ha az egyik serpenyőbe egy fél dinnyét, a másikba 15 körtét, 4 almát és 6 szilvát tett, akkor a mérleg egyensúlyban volt. Ehhez hasonlóan egy egész dinnye 40 barackkal és 10 almával tartott egyensúlyt. Hány barack súlya egyezett meg 3 körte súlyával? (Feltételezzük, hogy az egynemű gyümölcsök darabonkénti súlya egyenlő.)

3. Nemrég Bécsbe utaztam és egy laptopot vásároltam. A zsebemben csak 2 és 5 eurós érmék voltak, mindegyikből 300 darab. Arra jöttem rá, hogy az ára 50-féleképpen fizethető ki ezen érmékkel, de csak 2 euróssal nem tudtam volna kifizetni. Mennyibe kerülhetett a laptop?

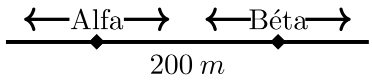
4. Egy téglalap alakú fehér vásznat a felső (hosszabb) széle mentén egy 40 cm-es sávban piros színű fénnyel, a bal szélén szintén egy 40 cm-es sávban zöld színű fénnyel világították meg. Ettől a vászon bal felső sarka egy négyzet alakban sárga színűnek látszott. Négyszer akkora terület maradt fehér, mint amekkora zöld színű lett és a sárga rész mindössze hatoda a fehér területnek. Hány deciméter hosszúak a vászon oldalai?




5. Mennyi a négyjegyű palindrom számok összege? (Egy egész szám palindrom, ha visszafelé olvasva önmagát kapjuk, pl. 3443, 2002, stb.)

## 5. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. Mateklandon csak egy, nyílegyenes, nagyon hosszú út létezik, amely mentén található két város, Alfa és Béta. Távolságuk 200 km. Egyenletes sebességgel egyszerre indul Alfából egy kerékpáros, Bétából pedig egy motoros, az útról sehol sem térhetnek le. A kerékpáros 20 km-t, a motoros 45 km-t tesz meg óránként. Milyen távol lehetnek egymástól 2 óra múlva? (A 2 óra alatt visszafordulni, megállni tilos volt!)




2. Az ábrán látható négyzet mind a kilenc mezejében eredetileg a 0 számjegy szerepelt. Egy lépés során kiválasztunk egy négy mezőből álló négyzetet, és benne lévő mind a négy szám értékét 1-gyel növeljük. 100 lépés után az ábrán látható számokhoz jutottunk el. Határozzátok meg $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ értékét!

| | | |
|---|---|---|
| 15 | a | 29 |
| b | c | d |
| 40 | e | f |

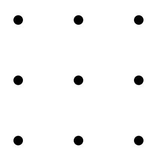
3. Artúr király kerek asztalánál nyolcan ülnek. A szomszédos lovagok haragban vannak, különben a lovagok között barátság van. Hányféleképp lehet kiválasztani 3 lovagot, akik barátságban vannak?

4. Egy könyvtárban egy 9 kötetes lexikon kötetei rendetlenül helyezkednek el az ábrán látható sorrendben. A könyvtáros szeretné minél kevesebb fogással rendezni a könyveket. Egy fogás alatt azt értjük, hogy egyidejűleg megfogunk 2 tetszőleges helyen lévő könyvet, s valahová letesszük: a sor elejére vagy végére, vagy valamelyik két könyv közé betesszük.

   A két megfogott könyvet nem választhatjuk el egymástól és sorrendjüket sem cserélhetjük fel. Két, már letett könyv között szabad rést nyitni két új könyv számára. A fenti szabályok megtartása mellett hogyan lehet a könyveket három fogással rendezni?

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | 2 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 |

5. A jobb oldali ábrán 9 pontot láthatunk 3 x 3-as elrendezésben. Hány olyan különbözőnek tekinthető háromszög van, amelynek csúcsai a 9 pont közül kerülnek ki? Két alakzatot akkor mondunk különbözőnek, ha sem tükrözéssel, sem mozgatással nem hozhatók fedésbe. A rajzaid elkészítéséhez használd a segédlapot! Mindegyik háromszöget másik ábrán rajzold meg!



## 6. osztály, 1. nap

## Országos döntő

1. 2013-ban a Kalmár László Matematika Verseny harmadik (országos) fordulójába a második (megyei) forduló résztvevőinek 3/40-ed része jutott be. Ezeknek pontosan a 2/9-ed része nyert a döntőben (harmadik forduló) díjat vagy oklevelet. Egy első, egy második és két harmadik díjat osztottak ki. Ezeken kívül négy további tanuló kapott oklevelet egy-egy feladat kiemelkedő megoldásáért. Hányan vettek részt a verseny második fordulójában?

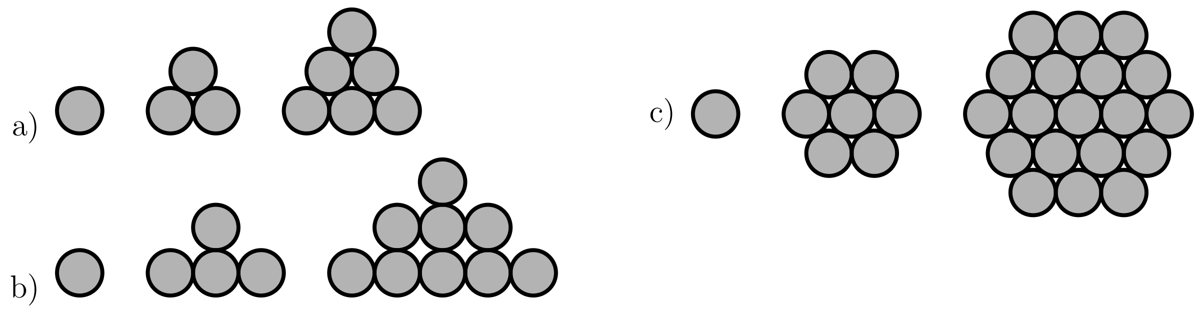
2. A következő feladatban egyforma betűk egyforma számjegyeket jelölnek, különböző betűk különbözőket. A $\square$-ok (téglalapok) a négy alapművelet jelét helyettesítik. Tehát az egyik feladat összeadás, egy másik kivonás, egy harmadik szorzás, egy negyedik osztás. Melyik betű melyik számjegyet jelenti, illetve az egyes feladatokban milyen műveleti jelet kell beírni ahhoz, hogy helyes műveleteket kapjunk?

   (1) $\overline{aaa} \square c = \overline{adde}$ (2) $\overline{ccc} \square f = \overline{fff}$

   (3) $\overline{adde} \square c = \overline{ccc}$ (4) $\overline{fff} \square g = \overline{fhd}$

3. Hány olyan különbözőnek tekinthető téglatest van, amelynek mindegyik éle – centiméterekben kifejezve – egész szám és az élek hossza legalább 2 cm, legfeljebb 8 cm? (Két téglatestet akkor mondunk különbözőnek, ha semmilyen térbeli mozgatással nem hozhatók fedésbe.)

4. Figyeld meg az ábrák szabályszerűségeit az egyes sorokban. Hány korong van a 100. ábrán az a), a b), illetve a c) sorban?



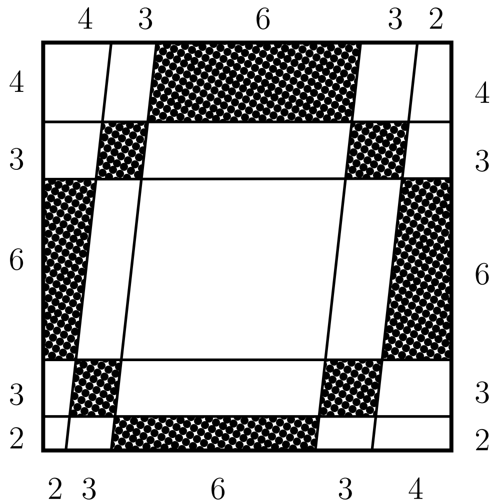

5. Melyik az a tízes számrendszerben felírt legkisebb pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy 2-esre végződik, és ha ezt a kettest a szám végéről áthelyezzük a szám elejére, akkor a szám kétszeresét kapjuk?

6. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. Egy amerikai nagyvárosban 2014 ház egyetlen sorban helyezkedik el. Minden ház után adót kell fizetni. Az első és az utolsó ház kivételével minden ház adója 1 dollárral kevesebb, mint a két szomszédja által fizetett adó szorzata. Hány dollárt fizetett a 2014 háztulajdonos összesen, ha az első ház adója 2 dollár, a második ház adója pedig 3 dollár?

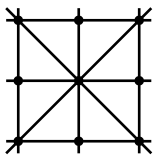
2. Határozzátok meg azon $a$, $b$, $c$ törzsszámokat (prímszámokat), amelyek kielégítik a következő egyenlőséget: $2 \cdot a + 3 \cdot b + 8 \cdot c + 8 \cdot c^2 = 2458$!

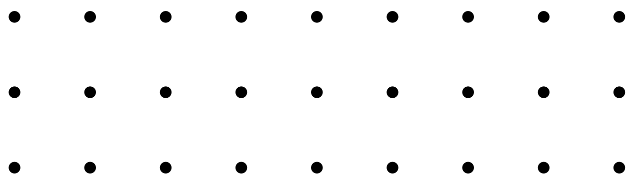
3. Az $ABCD$ négyzet $DC$ oldalát rendre 4, 3, 6, 3 és 2 cm-es, az $AD$ oldalát pedig 2, 3, 6, 3 és 4 cm-es, az $AB$ oldalt 2, 3, 6, 3 és 4 cm-es, a $BC$ oldalt pedig 2, 3, 6, 3 és 4 cm-es szakaszokra bontottuk. (Lásd ábra!) Mekkora a pöttyözött rész területe cm$^2$-ben mérve?




4. Egy nagyobb könyv oldalait 1-től kezdődően megszámozták az egymást követő természetes számokkal. Minden oldalra írtak számot. A számozáshoz háromszor annyi számjegyet használtak fel, mint ahány oldalas volt a könyv. Hány oldalas volt a könyv?

5. Az ábrán látható $3 \times 3$-as pontrácson behúztuk azon egyeneseket, amelyek legalább 3 ponton mennek át. Látható, hogy összesen 8 ilyen egyenest találtunk. Hány ilyen tulajdonságú egyenest lehet húzni egy $3 \times 9$-es méretű téglalapon? (Használd a segédlapot!)





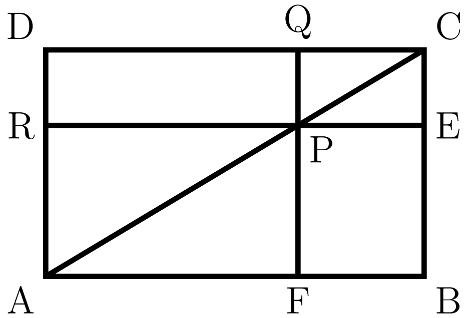
7. osztály, 1. nap | Országos döntő

1. Az Edison háza előtti kertkaput nehéz volt kinyitni, ezért az egyik barátja megszólta, hogy ”Igazán megjavíttathatnád már a kapudat, ez nem illik egy ilyen technikai zsenihez, mint te vagy”. Mire Edison: „A kapumat értelmesen terveztem meg. Rákötöttem a ciszternára (vízgyűjtő medence), s mindenki, aki betér hozzám, 20 liter vizet pumpál a ciszternámba.” Később Edison a 20 literes edényről áttért egy 25 literesre, de ekkor elegendő volt 12-vel kevesebb látogató a ciszterna megtöltéséhez. Hány literes a ciszterna? Hány látogató kellett eredetileg a megtöltéséhez?

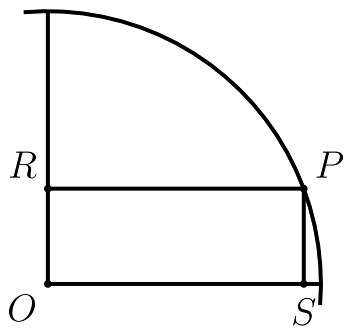
2. Ha a Nyíregyházi Vadaspark Totó nevű kétpúpú tevéje nagyon szomjas, akkor a testtömegének 84 %-a víz. Itatás után 800 kg-ot nyom, s ekkor testtömegének 85 %-a lesz víz. Hány kilogrammos Totó, ha szomjas?

3. Mennyi az A és B átlagának (számtani közepének) pontos értéke, ha $A = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{99}{100}$ és $B = \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{4} + \cdots + \frac{99^2}{100}$?

4. Az $ABCD$ téglalap $AC$ átlójának tetszőleges pontja legyen $P$. $P$-n át párhuzamosokat húzunk az oldalakkal (Lásd ábra). Igazold, hogy az $RPQD$ téglalap területe egyenlő a $PEFB$ területével.




Egy negyed körcikk körívén felvettünk egy tetszőleges $P$ pontot, amelyen át párhuzamosakat húztunk a határoló sugarakkal. Hol kell felvennünk a $P$ pontot ahhoz, hogy a $PROS$ téglalap területe a lehető legnagyobb legyen?




5. Egy fejszámoló bűvész a közönségével a következő játékot játssza: a közönségből valakit megkér, hogy gondoljon egy olyan tízes számrendszerbeli háromjegyű számra, amelyben nincs 0. Jelöljük a gondolt számot $\overline{abc}$-vel. Ezt csak a közönségnek mondják meg, akik képezik a következő számokat: $\overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$, majd megmondják a bűvésznek ezek összegét, amit $N$-nel jelölünk. Mi volt a gondolt szám, ha $N = 3194$?

## 7. osztály, 2. nap

## Országos döntő

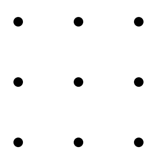
1. Tamást megkérdezték, hogy hányadik helyen végzett a városi mezei futóversenyen. Ő így válaszolt: „Ha az előttem végzett tanulók negyedrésze utánam következne, akkor hattal többen lennének utánam, mint előttem.” Hányadik lett Tamás a versenyen, ha összesen 97-en indultak?

2. Egy horgász a napi zsákmánya össztömegének 35%-át kitevő három legnagyobb halat a mélyhűtőbe tette. A három legkisebb halat, amelyek együttesen a megmaradt rész össztömegének 5/13-át tették ki, elvitte a macska, a többit pedig megfőzték ebédre. Hány halat fogott a horgász?

3. Keressétek meg az összes olyan egész számot, amely lehet egy szabályos sokszög belső szögének fokban kifejezett mérőszáma.

4. Jelöljük a $999^{999}$ számjegyei összegét $A$-val. Legyen $A$ számjegyei összege $B$, a $B$ számjegyei összege pedig legyen $C$. Mivel egyenlő $C$?

5. A jobb oldali ábrán 9 pontot láthatunk $3 \times 3$-as elrendezésben. Hány olyan különbözőnek tekinthető négyszög van, amelynek csúcsai a 9 pont közül kerülnek ki? Két alakzatot akkor mondunk különbözőnek, ha mozgatással nem hozhatók fedésbe. A rajzaid elkészítéséhez használd a segédlapot! Mindegyik négyszöget másik ábrán rajzold meg!



8. osztály, 1. nap — Országos döntő

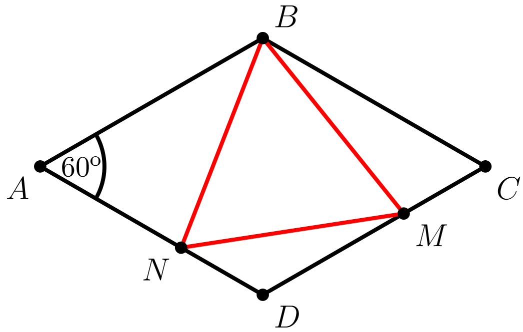
1. A 2014-et felírtuk három természetes szám összegeként úgy, hogy ha az első számot elosztjuk a másodikkal, akkor hányadosként és maradékként is 8-at kapunk. Ha pedig a harmadik számot osztjuk az elsővel, akkor a hányados 6, a maradék pedig 20. Mivel egyenlő ez a három természetes szám?

2. Legyenek $x$ és $y$ egész számok, továbbá $x \geq 0$. Hány olyan egész számokból álló $(x; y)$ számpár van, amely kielégíti az $2x^2 - 2xy + y^2 = 289$ egyenletet?

3. Rajzold meg egy háromszög három belső és három külső szögének felezőjét. Ezen hat egyenes közül melyik kettő lehet merőleges egymásra?

4. Legyen $p$ ötnél nagyobb prímszám. Igazold, hogy a $(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)$ szorzat osztható 360-nal.

5. Az $ABCD$ rombusz A csúcsnál lévő szöge $60^{\circ}$. A rombusz $AD$ oldalának belsejében felvettünk egy $N$ pontot, a $DC$ szakasz belsejében pedig egy $M$ pontot. Igazoljátok, hogy ha a $BMN$ háromszög valamelyik szöge $60^{\circ}$, akkor a $BMN$ háromszög szabályos.



8. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Anna kétszer annyi idős, mint amilyen Bea volt akkor, amikor Anna olyan idős volt, mint Bea most. De amikor Bea olyan idős lesz, mint Anna most, életkoruk összege 135 lesz. Milyen idős most Anna, illetve Bea?
2. Bizonyítsátok be, hogy bármely háromszög súlyvonalainak összege nagyobb, mint a háromszög kerületének $\frac{3}{4}$ része!
3. Az $\overline{abcdef}$ és $\overline{fdebca}$ hatjegyű számok különbsége osztható 271-gyel. Bizonyítsátok be, hogy $b = d$ és $c = e$ !
4. Egy kör kerületére kilenc egész számot írunk, amelyek összege 90. Bizonyítsuk be, hogy van négy egymás melletti szám, amelyek összege legalább 40.
5. Mivel egyenlő az $A$ és $B$ átlaga (számtani közepe), ha $A = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{2013\cdot 2014}$ és $B = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{2014\cdot 2015}$?

# Megoldások

**5. osztály** **Megyei forduló**

1. Marcinak hétszer annyi pénze van, mint Gergőnek. Ha Marci adna 65 Ft-ot Gergőnek, akkor már csak kétszer annyi pénze lenne, mint Gergőnek. Hány forintja van Marcinak és Gergőnek együtt?

*Első megoldás.* Fordítsuk le a szöveget matematikai nyelvre! Legyen a Gergő pénze x, akkor a Marcié 7x. Ha Marci átad 65 Ft-ot, akkor már csak 7x − 65 Ft-ja marad. Gergő kap 65 Ft-ot, tehát x + 65 Ft-ja lesz. Ha ezt megkétszerezem, akkor egyenlők lesznek, vagyis: 7x - 65 = 2(x + 65). Megoldva: x = 39. Ellenőrzés: Gergőnek 39 forintja van, Marcinak hétszer ennyi, azaz 273. Ha Marci átad 65 Ft-ot, akkor neki 208, Gergőnek pedig 104 Ft-ja lesz. A két fiú pénze együtt: $39 + 39 \cdot 7 = 312$. A tipikus hibák helytelen egyenletfelírásból származnak, pl.: 7 x = 2 (x + 65), ahonnan a válasz x = 26. Ha a 7 x - 65 = 2 x egyenletet írja fel a tanuló, akkor x = 13 adódik.

*Második megoldás.* Ha Marcinak 7-szer annyi pénze van, mint Gergőnek, akkor kettejük pénzének 7 nyolcad részével rendelkezik Marci, Gergő pedig az 1 nyolcaddal. A 65 Ft átadása után 2 harmad, 1 harmadra változik a pénzük aránya. Tehát $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{21-16}{24} = \frac{5}{24}$ rész jelenti a 65 Ft-ot. Innen az egész pénz a 65 ötödének a 24- szerese, azaz 312 Ft. Ellenőrzés: lásd az első megoldásnál.

2. Egy négyjegyű számhoz hozzáadtuk az utolsó három jegyéből képzett számot, majd az utolsó két jegyéből képzettet, végül az utolsó jegyét. Így eredményül 3042-őt kaptunk. Mi lehetett az eredeti négyjegyű szám?

Fordítsuk le a feladat szövegét „matematikai nyelvre”! Legyen a négyjegyű szám $ABCD$. Írásbeli műveletként fogjuk kiokoskodni a feladat megoldását. Az egyesek helyén az a kérdés, hogy ”hányszor 4 végződik 2-esre”. Kétféle válasz lehetséges: a, $3 \cdot 4 = 12$ vagy b, $8 \cdot 4 = 32$ . Az a, esetben az egyesek helyi értékén 1 a maradék, ezért C-nek is 1-nek kell lennie a tízesek oszlopán. A tízesek helyi értékén nem lesz maradék. A százasok oszlopán B = 0 vagy B = 5 esetén lesz az eredmény 0. Az első esetben A = 2, a másodikban pedig A = 3. Tehát a keresett négyjegyű számok 3013, illetve 2513. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a kapott eredmények helyességéről: 3013 + 013 + 13 + 3 = 3042 illetve 2513 + 513 +13+3 = 3042. A b, esetben D = 8, maradék 3. Tehát C-nek 7-nek kell lenni és itt a maradék 2, amit átviszünk a százasok helyi értékére. Látható, hogy a B vagy 4, vagy 9 kell legyen. B = 4 esetén A = 2, ha B = 9, akkor A = 1. Tehát a keresett négyjegyű számok 2478, illetve 1978. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a kapott eredmények helyességéről: 2478 + 478 + 78 + 8 = 3042 illetve 1978 + 978 + 78 +8 = 3042. Elég megtalálni a megoldásokat, indoklást ne várjunk, hogy miért nincs több.

3. Képzeld el, hogy leírtuk a teljes szorzótáblát $1 \cdot 1 = 1$-től $10 \cdot 10 = 100$ -ig. Tehát 100 darab szorzást írtunk le. Mivel egyenlő a kapott szorzatok összege? Számolj minél ötletesebben! (Neked nem kell a teljes szorzótáblát leírnod, csak ha nagyon akarod.)

*Első megoldás.* Vegyük észre, hogy a fenti összeg egyenlő a $(1+2+3+\cdots+9+10)\cdot(1+2+3+\cdots+9+10) = 55 \cdot 55 = 3025$ szorzattal.

*Második megoldás.* Számoljuk ki az 1-es szorzótábla eredményeit. 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55. A kettes szorzótábla eredményei 2-szer akkorák lesznek mint 55, tehát 110. A hármas szorzótábla eredményei 165, s.í.t. Összegezve 55+110+165+220+275+330+385+440+495+550=3025. Itt lehet a ”kis Gauss” módszert is alkalmazni, de az is elfogadható, ha írásbeli műveletként kiszámolja a versenyző.

4. Egy kocka minden élét 3 egyenlő részre osztottuk. Minden csúcsnál kiválasztottuk azt a 3 harmadoló pontot, amely a legközelebb van a kiválasztott csúcshoz, majd ezeken keresztül egy síkkal levágtuk a kocka „sarkait”. A levágott testeknek négy csúcsa van, a nevük tetraéder (háromszög alapú gúla, négylapú test). A nyolc levágás után megmaradt testnek hány éle, csúcsa, lapja van? Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek a határoló lapok?

Élek száma: Az eredeti kocka minden élének megmarad 1 harmada, tehát ez 12 élt jelent a maradék testnél. Minden levágott sarki tetraédernél bejön még 3-3 él, ez 24 új él. Összesen $12 + 24 = 36$ éle lesz a maradék testnek. Csúcsok száma: Az eredeti kocka minden csúcsát levágtuk. A csúcsoknál keletkezett síkmetszetek mindegyike háromszög, tehát itt 3 új csúcs lép be. Ez összesen $8 \cdot 3 = 24$ csúcsot jelent a maradék test vonatkozásában. Lapok száma: A kocka eredeti hat lapjából maradnak meg részek, továbbá új határoló lapként lépnek be a sarkokon keletkezett háromszögek. Ezek száma 8. Tehát $8 + 6 = 14$ határoló lap lesz. A határoló lapok közül nyolc szabályos háromszög, a többi hat pedig nyolcszög, s ezeknek minden második oldala egyenlő hosszú. *Megjegyzés.* A határoló lapok tulajdonságainak megnevezésénél minden olyan megoldást elfogadhatunk, amely utal a fenti tulajdonságokra, de nyelvileg, matematikailag nem elég pontos.

5. Hány olyan háromjegyű szám van, amely számjegyei között van páros és páratlan számjegy is?

*Első megoldás.* 900 darab háromjegyű szám van. Ezek számából le kell vonni azokat, amelyekben csak páros számjegy van, illetve csak páratlan számjegyet tartalmaznak. a, Csak páros számjegyet tartalmazók száma. A százasok helyén nem állhat 0, csak 2, 4, 6, és 8. A tízesek és egyesek helyén már mindenféle páros számjegy állhat. Tehát ezek száma: $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$. b, Csak páratlan számjegyet tartalmaznak. A százasok, tízesek, egyesek helyi értékén egyaránt ötféle számjegy állhat. Az ilyen számok száma $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. A feladat kérdésére a válasz $900 - 100 - 125 = 675$. A megoldás során az „összes - rossz = jó” leszámláló módszert alkalmaztuk.

*Második megoldás.* 100-től 109-ig mind a 10 szám jó, 110-től 119-ig 5 db, aztán 120-tól 129-ig megint 10, utána megint 5, stb., így az 1-essel kezdődő számok közül 10+5+10+5+10+5+10+5+10+5 = 75 lesz jó. Utána 200-tól 209-ig 5 db, utána 10, 5, 10, 5, ... ez 299-ig megint 75 lehetőség. A 3-assal kezdődőeknél ugyanaz van, mint az 1-essel kezdődőeknél, tehát 75 lehetőség, és ugyanígy a 4-essel, 5-össel, ..., 9-essel kezdődőeknél. Tehát minden „százas kupacban” 75 ilyen szám van. Tehát $9 \cdot 75 = 675$ ilyen szám van.

1. Ismerkedj a 100 tulajdonságaival!
I.) Állítsd elő a 100-at a, 2, b, 3, c, 4, d, 5 négyzetszám összegeként! Egy-egy négyzetszámot legfeljebb kétszer használhatsz!
II.) Állítsd elő a 100-at köbszámok összegeként! Egy-egy köbszámot legfeljebb kétszer használhatsz!
Mindegyik feladatrészre egy-egy megoldást keress!
Megjegyzés: Legyen $n \geq 1$ természetes szám. Ekkor $n^2$-et négyzetszámnak, $n^3$-t köbszámnak mondjuk, ahol $n^2 = n \cdot n$ és $n^3 = n \cdot n \cdot n$.

I.) A felsorolás szempontja legyen az, hogy a négyzetszámokat nem növekvő (zömmel csökkenő) sorrendben adjuk meg. A négyzetszámok 100-ig $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$, $10^2 = 100$. a, Ha két tagból áll az összeg, akkor $6^2 + 8^2 = 100$. Több nincs. b, Három tagból nem lehet előállítani. A négyzetszámok 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot adnak. A 100 pedig 3-mal osztva 1 maradékot ad. Tehát ki kell választanunk a 9, 36 és 81 közül kettőt és ezek összegéhez kellene adnunk egy olyan négyzetszámot, amely 3-mal osztva 1 maradékot ad. 100-(9+36)=55 nem négyzetszám, 100-(9+81)=10 szintén nem négyzetszám, a 36 és a 81 összege pedig eleve sok. Hasonlóan belátható, hogy két egyforma, 3- mal osztható négyzetszám segítségével sem lehet előállítani: 100-(9+9)=82 nem jó, 100-(36+36)=28 nem jó, 100-(81+81) negatív, nem jó. c, Négy tagból: $9^2+3^2+3^2+1 = 100$, $8^2+4^2+4^2+2^2 = 100$, $7^2+7^2+1+1 = 100$, $7^2 + 5^2 + 5^2 + 1 = 100$. d, Öt tagból: $7^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 1 = 100$.

*Megjegyzés.* Hat tagból: $7^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2 + 1$, $7^2 + 5^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2$. Hét tagból: $7^2 + 5^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1 + 1$. II.) Köbszámok 100-ig $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$. Négy köbszámból: $4^3 + 3^3 + 2^3 + 1 = 100$. Több megfelelő előállítás nincs.

2. Egy régi számlán ez áll:
237 darab (a termék neve olvashatatlan), az egységár *1* Ft ** fillér, fizetendő végösszeg 7***0 Ft 65 fillér.
A *-ok helyén álló számjegyek olvashatatlanok. Minden csillag egy számjegyet jelöl.
Számítsd ki a hiányzó számjegyeket! (1 Ft = 100 fillér)

Fogalmazzuk meg a feladatot írásbeli műveletként! A hiányzó számjegyeket betűkkel jelöltük.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | a | 1 | b, | c | d | · | 2 | 3 | 7 |
| | e | f | g | h | i | j | | | | |
| | k | l | m | n | o | | | | | |
| p | q | r | s | t | | | | | | |
| 7 | x | y | z | 0, | 6 | 5 | | | | |

A szorzást a szorzó legkisebb helyi értékű jegyével kezdtük az ábrán. A szorzandó balról második jegye az 1 (egy) és nem l (el) betű. A $d$ számjegy csak 5 lehet, mert csak a 7-szer 5 végződik 5-re. A középső részletszorzat utolsó jegyét a 3-szor $d$-ből kapjuk, tehát $o = 5$. Az $i$ értékét a tizedek oszlopán tudjuk leolvasni, tehát $i = 1$. Figyeljük újra a 7- tel való szorzatot! $7 \cdot 5 = 35$ miatt a $c$-nek 4-nek kell lenni, csak akkor lesz $i = 1$. Most már be tudjuk írni a második és harmadik részletszorzat utolsó előtti jegyeit is.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | a | 1 | b, | 4 | 5 | · | 2 | 3 | 7 |
| | e | f | g | h | 1 | 5 | | | | |
| | k | l | m | 3 | 5 | | | | | |
| p | q | r | 9 | 0 | | | | | | |
| 7 | x | y | z | 0, | 6 | 5 | | | | |

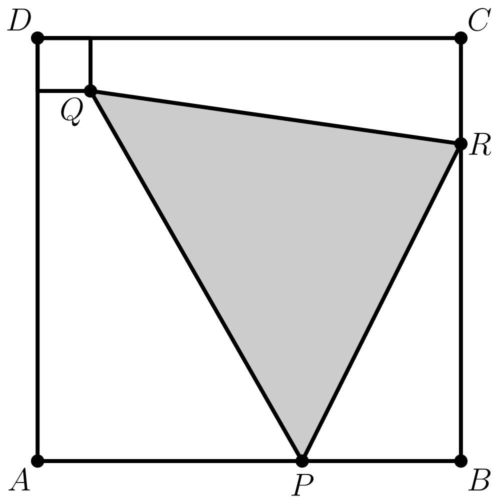
A tizedes vessző előtti egyesek oszlopán leolvashatjuk, hogy $h = 7$. A 7-szer $b + 3$ csak akkor végződik 7-re, ha $b = 2$. Újabb számjegyeket tudunk megfejteni: $m = 7, r = 4, g = 8, l = 3, q = 2.z = 5, y = 0$. Az első és a második részletszorzat értéke 1-gyel növeli a $p$ értékét, így csak az $a = 3$ lehetséges. Ezek után a teljes szorzás:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 3 | 1 | 2, | 4 | 5 | · | 2 | 3 | 7 |
| | 2 | 1 | 8 | 7 | 1 | 5 | | | | |
| | 9 | 3 | 7 | 3 | 5 | | | | | |
| 6 | 2 | 4 | 9 | 0 | | | | | | |
| 7 | 4 | 0 | 5 | 0, | 6 | 5 | | | | |

Tehát az egységár 312,45 Ft, a fizetendő összeg 74050,65 Ft.

3. Az $ABCD$ négyzet oldalainak hossza nyolc egység. Az $AB$ oldalon levő $P$ pont öt egység távolságra van az $A$ ponttól, a $BC$ oldalon levő $R$ pont két egység távolságra van a $C$ ponttól, míg a négyzet belsejében levő $Q$ pont a $CD$ és $AD$ oldalaktól is egy egység távolságra van. Számítsd ki a $PQR$ háromszög területét!

Készítsük el a szöveg alapján a megfelelő ábrát!




A PQR háromszög területét úgy számítjuk ki, hogy a négyzet területéből levonjuk a felesleges részek területét. Az $ABCD$ négyzet területe 64 egység, ebből fogjuk levonni a „felesleges" részeket. A jobb alsó sarokban lévő $PBR$ háromszög területe $\frac{3 \cdot 6}{2} = 9$. A jobb felső sarokban lévő trapézt felbonthatjuk egy téglalapra és egy derékszögű háromszögre, ezért a területe $7 + \frac{1 \cdot 7}{2} = 10,5$. A bal alsó sarokban lévő trapéz is felbontható egy téglalapra és egy derékszögű háromszögre, ezért a területe $7 + \frac{4 \cdot 7}{2} = 21$. A bal felső sarokban van még egy 1 területű négyzet. Tehát $64 - 9 - 10,5 - 21 - 1 = 22,5$ egység a $PQR$ háromszög területe.

4. Tibi és Kati testvérek. A szüleik télre kabátot, sapkát és nadrágot vettek a gyerekeknek. A Tibi ruháinak mindegyike 50 %-kal drágább volt, mint Kati megfelelő ruhája. Tibi kabátja 10-szer annyiba került, mint a sapkája és háromszor annyi volt, mint Kati nadrágja és sapkája együtt. Mennyibe kerültek az egyes ruhadarabok, ha a szülők 75 ezer forintot fizettek összesen a hat ruhadarabért?

*Első megoldás.* Foglaljuk a feladat feltételeit egy áttekinthető táblázatba:

| | kabát | sapka | nadrág |
|---|---|---|---|
| Kati | k | s | n |
| Tibi | 1,5k | 1,5s | 1,5n |

Továbbá: 1,5k = 15s (Tibi alapján), tehát $k = 10 \cdot s$. $1,5k = 3 \cdot (n + s)$. E két egyenlőségből $15 \cdot s = 3 \cdot (n + s)$. Rendezve $12 \cdot s = 3 \cdot n$, $4 \cdot s = n$. Ezek alapján módosíthatjuk a táblázatunkat:

| | kabát | sapka | nadrág |
|---|---|---|---|
| Kati | $10 \cdot s$ | $s$ | $4 \cdot s$ |
| Tibi | $15 \cdot s$ | $1,5s$ | $6 \cdot s$ |

Mivel a szülők 75 000 Ft-ot fizettek, ezért felírhatjuk a következő egyenlőséget: $10 \cdot s + s + 4 \cdot s + 15 \cdot s + 1,5 \cdot s + 6 \cdot s = 75000$. Összevonások után: $37,5 \cdot s = 75000$, $s = 2000$. Tehát Kati ruhái 20000, 2000 és 8000 Ft-ba, a Tibié pedig 30000, 3000 és 12000 Ft-ba kerültek. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a kapott értékek helyességéről.

*Második megoldás.* Mivel Tibi minden ruhája 1,5-szer annyiba kerül, mint Katié, Kati ruhái együtt $75000 : 2,5 = 30000$ forintba, Tibi ruhái 45000 forintba kerülnek. Tibi kabátja háromszor annyiba kerül, mint Kati sapkája és nadrágja, Tibi sapkája és nadrágja pedig 1,5-szer annyiba. Így Tibi ruhái 4,5-szer annyiba kerülnek, mint Kati sapkája és nadrágja. Ebből Kati sapkája és nadrágja együtt $45000 : 4,5 = 10000$ forint, tehát Tibi kabátja 30000 forint.

Ekkor Tibi sapkája $30000 : 10 = 3000$ Ft, nadrágja $45000 - 33000 = 12000$ Ft, Kati kabátja 20000 Ft, sapkája 2000 Ft, nadrágja 8000 Ft. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a kapott értékek helyességéről.

5. Hány darab 45-tel osztható $\overline{abcba}$ alakú ötjegyű szám van, ahol $a$, $b$ és $c$ különböző számjegyeket jelöl?

45-tel pontosan akkor osztható egy szám, ha 9-cel és 5-tel is osztható. 5-tel pontosan akkor osztható egy szám, ha 5-re vagy 0-ra végződik. Mivel a nem lehet 0, így a csak 5 lehet. Az eredeti számunk osztható 9-cel, így számjegyeinek összege, $10 + 2b + c$ is osztható 9-cel. Mivel $2b + c$ legnagyobb értéke 27, ezért $10 + 2b + c$ lehetséges értékei 18, 27, 36.

I. eset: Ha $2b + c = 8$, akkor a lehetséges számjegyek $b = 4$ $c = 0$, $b = 3$ $c = 2$, $b = 2$ $c = 4$, $b = 1$ $c = 6$, $b = 0$ $c = 8$. Ez öt megoldás.

II. eset: Ha $2b + c = 17$, akkor a lehetséges számjegyek: $b = 8$ $c = 1$, $b = 7$ $c = 3$, $b = 6$ $c = 5$, $b = 5$ $c = 7$, $b = 4$ $c = 9$. Itt a 6, 5 és 5, 7 párok nem megfelelőek, mert nem lenne minden számjegy különböző. Ez tehát 3 megoldás.

III. eset: Ha $2b + c = 26$, akkor a lehetséges számjegyek: $b = 9$ $c = 8$. Ez egy megoldás. Összesen $5 + 3 + 1 = 9$ megoldás van.

1. Alfa tanár úr 5 tanulót vizsgáztatott matematikából. Az elért pontszámokat *véletlen* sorrendben írta egy papírra, majd minden leírt pontszám után kiszámolta a papíron lévő számok számtani közepét (átlagát). Alfa tanár úr rájött, hogy minden egyes leírt szám után az átlag egy egész szám. A diákok pontszámai *növekvő* sorrendben a következők voltak: 71, 76, 80, 82 és 91. Milyen sorrendben jegyezhette le a számokat Alfa tanár úr?

Vizsgáljuk a számok hárommal, néggyel való osztásának maradékait!

| | 71 | 76 | 80 | 82 | 91 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3-mal osztva | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 4-gyel osztva | 3 | 0 | 0 | 2 | 3 |

A feltételek alapján az első két szám vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan. Az első három szám összege osztható 3-mal, ezért csak a 76, 82 és a 91 jöhet szóba valamilyen sorrendben. Innen már láthatjuk, hogy az első kettő csak a 76 és a 82 lehetett valamilyen sorrendben. A harmadik pedig a 91. Ez a három szám 4-gyel osztva 1 maradékos, tehát kell még egy 4-gyel osztva 3 maradékos, ez pedig a 71 lesz. A 71 a negyedik szám, az ötödik pedig a 80. A sorrend tehát első kettő a 76 és a 82 lehetett valamilyen sorrendben, a harmadik a 91, a negyedik a 71, az ötödik pedig a 80. Tehát két sorrend is lehetett.

2. Az 1 számlálójú törteket törzstörteknek nevezzük. Figyeld meg a következő törzstörtekre bontást: $\frac{19}{20} = \frac{10+5+4}{20} = \frac{10}{20} + \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$. Tehát $\frac{19}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$, s ezek különböző törzstörtek. Bontsd fel különböző törzstörtek összegére a következő törteket: $\frac{19}{24}$; $\frac{29}{48}$; $\frac{21}{25}$; $\frac{6}{7}$!

A nevezők osztóiból, vagy a nevezők többszörösei osztóiból kell előállítani a számlálókat ahhoz, hogy egyszerűsíteni tudjunk. $\frac{19}{24} = \frac{12+6+1}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24}$
$\frac{29}{48} = \frac{12+8+6+3}{48} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$
$\frac{21}{25}$ törtnél nem működik az előbbi típusú felbontás, először bővíteni kell a törtet: $\frac{21}{25} = \frac{42}{50} = \frac{25+10+5+2}{50} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{25}$
$\frac{6}{7}$–nél 4-gyel kell bővíteni. $\frac{6}{7} = \frac{24}{28} = \frac{14+7+2+1}{28} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}$

3. Melyek azok a háromjegyű számok, amelyek egyenlők a számjegyeik faktoriálisainak összegével? ($n$! olvasd $n$ faktoriális! Az $n$ szám faktoriálisának nevezzük az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ szorzatot, tehát szavakkal elmondva $n$! jelenti az első $n$ pozitív egész szám szorzatát. Pl.: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, de $0! = 1$ és $1! = 1$)

Tervszerű próbálgatást fogunk alkalmazni! A számjegyek között nem szerepelhet a 7, 8, 9, mert ezek faktoriálisa nagyobb, mint 1000. Ebből következik, hogy a szám nem nagyobb 666-nál, és így a 6-os sem szerepelhet, mert $6! = 720 > 666$. Az sem lehetséges, hogy mindegyik jegy kisebb 5-nél, mert ebben az esetben a szám legfeljebb $4! + 4! + 4! = 72$ lehetne, vagyis nem lehetne háromjegyű. A jegyek között tehát szerepel az 5. Ha egyetlen 5-ös szerepel, akkor a szám $5! + 0! + 0! = 122$ és $5! + 4! + 4! = 168$ közé esik, az első jegye tehát az 1. Az 5! és 1! összege 121. A harmadik jegy 1, 2, 3, 4, aminek a faktoriálisa 1, 2, 6 vagy 24; ezért csak a 122, 123, 127, 145 számokat kell ellenőrizni. Ezek közül csak a 145 megoldás. Ha két 5-ös jegy van, akkor a szám $5! + 5! + 0! = 241$ és $5! + 5! + 4! = 264$ közé esik, az első jegy a 2; ebben az esetben a szám csak $5! + 5! + 2! = 242$ lehetne, de ez nem megoldás, nincs is benne 5-ös számjegy. Végül, a 3 darab 5-ös számjegyből álló 555 sem megoldás, mert $5! + 5! + 5! = 360$ és nem 555. Az egyetlen megoldás tehát a 145.

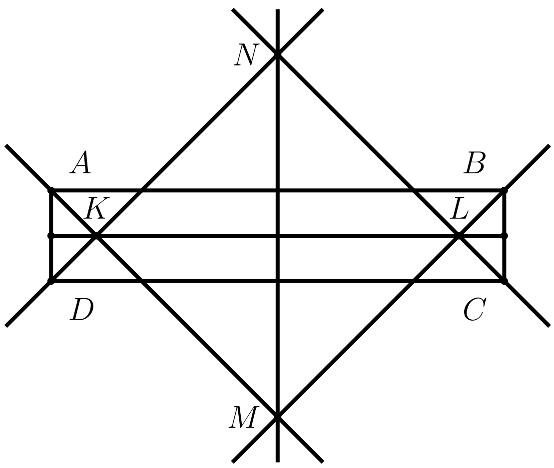
4. Hány olyan nem üres részhalmaza van az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$ halmaznak, amelyben az elemek szorzata 5-re végződik? (Az egyelemű halmazban az elemek szorzata maga az elem.)

Egy szorzat pontosan akkor végződik 5-re, ha törzstényezős felbontásában csak páratlan számok szerepelnek és az 5 is szerepel benne. Képezzük az öttel nem osztható páratlan számok halmazát: A=1; 3; 7: 9; 11; 13, valamint az öttel osztható páratlan számok halmazát: B=5; 15. Ha az A halmazból valahány elemet kiveszünk, s ezeket összeszorozzuk, akkor a kapott szorzat páratlan lesz. Ilyen részhalmaz 64 lesz ($2^6$), hiszen egy-egy elemet vagy kiválasztunk, vagy nem, tehát minden elemnél két lehetőségünk van. Itt az üres halmazt és az alaphalmazt is választhatjuk. Ehhez kell még szorzó tényezőként hozzávenni a B halmaz valahány elemét: 5, 15 vagy $5 \cdot 15 = 75$. Ezt háromféleképpen választhatjuk, mert ebben az esetben az üres halmazt nem választhatjuk. Tehát, ha azt akarjuk, hogy a törzstényezős felbontásban csak páratlan számok szerepeljenek **és** az 5 is szerepeljen benne, akkor a lehetőségek számát össze kell szoroznunk (szorzási szabály). Az összes lehetőség $2^6 \cdot 3 = 192$.

5. Egy téglalap egyik oldala a másik oldal ötszöröse. A téglalap szögfelezői által meghatározott négyszög területe 32 $cm^2$. Mekkora a téglalap területe?

A szöveg csak annyit mond, hogy a szögfelezők által meghatározott síkidom egy négyszög, tehát be kell látnunk, hogy ez egy négyzet.

Állítás: Az $ABCD$ téglalap szögfelezői által meghatározott négyszög egy négyzet.




Bizonyítás: A téglalap szögfelezőinek metszéspontjai legyenek $K$, $L$, $M$ és $N$. A szerkesztésből adódóan a $KMLN$ négyszög tengelyesen tükrös a $KL$ és az $MN$ egyenesekre, amelyek merőlegesek egymásra. Kevés szögszámítással beláthatjuk, hogy mind a négy szöge derékszög. Azt is beláttuk ezzel, hogy $NM = KL$, hiszen a négyzet átlói egyenlők. A négyzet területét kiszámíthatjuk a rombusz területhez hasonlóan az "átlószor átló per 2" képlettel. Tehát $\frac{NM \cdot KL}{2} = 32$, $NM \cdot KL = 64$. Fentebb beláttuk, hogy $NM = KL$, így $NM = KL = 8$, amiből az $ABCD$ téglalap oldalai 10 és 2 cm-esek, tehát a területe 20 $cm^2$.

8. osztály Megyei forduló

1. Az apa, az anya és a három lányuk együtt 118 évesek. Az anya 10 évvel idősebb, mint a három lány együtt. A szülők életkora közötti különbség éppen a legkisebb lány életkorával egyenlő. Az egyik lány 2 évvel fiatalabb, mint a másik és ugyanannyival idősebb a harmadiknál. Hány évesek a szülők?

A szülők életkorára vonatkozó információ kétértelmű, lehet, hogy az anya idősebb, lehet, hogy az apa. Tehát a feladatnak két megoldása lesz.

I. eset: Legyen az apa idősebb. Ha a legfiatalabb lány $x$ éves, akkor a középső $x+2$, a legnagyobb pedig $x+4$. Ekkor az anya életkora $x+x+2+x+4+10=3x+16$. Az apa ennél $x$ évvel több, tehát $4x+16$.

Felírhatjuk a következő egyenletet: $x+(x+2)+(x+4)+(3x+16)+(4x+16)=118$. Végezzük el a szükséges összevonásokat: $10x+38=118$ , ahonnan $x=8$. A lányok 8, 10 és 12 évesek, az anya 40, az apa 48. Ez teljes egészében kielégíti a feladat követelményeit.

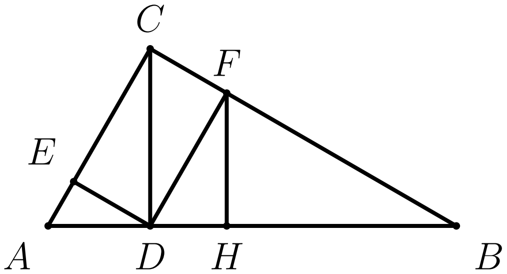
II. eset: Legyen az apa fiatalabb. Az előbbieket felhasználva a lányok $x$, $x+2$, $x+4$ évesek, az anya $3x+16$, az apa pedig $2x+16$. Az előbbihez hasonló egyenletet írunk fel: $x+(x+2)+(x+4)+(3x+16)+(2x+16)=118$ Rendezve: $8x+38=118$, $x=10$. Tehát ebben az esetben a lányok 10, 12, 14 évesek, az anya 46, az apa 36 éves. Ez is jó megoldás.

2. Igazoljátok, hogy egy olyan négyjegyű természetes szám, amelynek két-két számjegye azonos, nem lehet prímszám (törzsszám)!

A szövegben szereplő négyjegyű számok algebrai alakja aabb, abab, abba . Mindegyik esetben alkalmazzunk helyi értékes felbontást és keressünk egy olyan 1-nél nagyobb természetes számot, amellyel a vizsgált kifejezés osztható. a, $\overline{aabb}=1000a+100a+10b+b=1100a+11b$, ami osztható 11-gyel. b, $\overline{abab}=1000a+100b+10a+b=1010a+101b$, ez 101-gyel osztható. c, $\overline{abba}=1000a+100b+10b+a=1001a+110b=11(91a+10b)$. Az átalakításokból látható, hogy osztható 11-gyel.

3. Az $ABC$ derékszögű háromszög átfogója $AB$, a $CAB$ szög 60 fokos. A $C$-ből induló magasság talppontja $D$. Az $ADC$ háromszögben a $D$-ből induló magasság talppontja $E$, a $CDB$-ben az egyik magasság $DF$. A $DFB$ háromszög $F$-ből induló magassága $FH$. Igazoljátok, hogy $\overline{HB}=\overline{HA}+\overline{AE}$ !

*Első megoldás.* Készítsünk a feladat szövege alapján olyan ábrát, amely jó közelítéssel tükrözi a feladatbeli mennyiségi viszonyokat!




Ismeretes, hogy a 30, 60, 90 fokos szögekkel bíró háromszögben az átfogó kétszerese a rövidebbik befogónak. Ezt fogjuk felhasználni a megoldás során többször is. Tehát: $AC=\frac{1}{2}AB$,

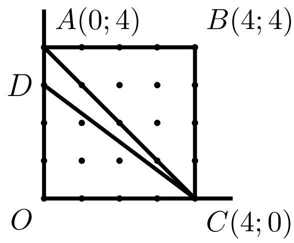
$AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{4}AB$, továbbá $AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{8}AB$, $DH = \frac{1}{2}DF$. A $CEDF$ téglalapban $DF = CE = AC - AE = (\frac{1}{2} - \frac{1}{8})AB = \frac{3}{8}AB$. Tehát $DH = \frac{3}{16}AB$. Ebből két dolog következik. Egyrészt $HB = AB - AD - DH = (1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{16})AB = \frac{9}{16}AB$. Másrészt $HA + AE = AD + DH + AE = (\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8})AB = \frac{9}{16}AB$. Tehát $\overline{HB} = \overline{HA} + \overline{AE} = \frac{9}{16} \cdot AB$, s ezt akartuk bizonyítani.

*Második megoldás.* Az ábra jelölései alapján kicsit rövidebben: $AD = 2 \cdot AE$, $AC = 2 \cdot AD = 4 \cdot AE$, $AB = 2 \cdot AC = 8 \cdot AE$, $DB = AB - AD = 6 \cdot AE$, $DF = DB : 2 = 3 \cdot AE$, $DH = DF : 2 = 1,5 \cdot AE$, $HA = AD + DH = 3,5 \cdot AE$, $HB = DB - DH = 4{,}5 \cdot AE$, amiből adódik, hogy $HB = HA + AE$.

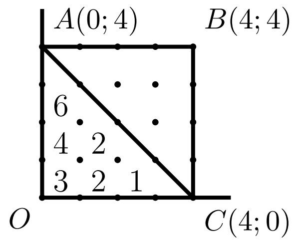
4. Hány olyan <u>konvex</u> négyszög, ötszög, hatszög van, amelynek három egymás után következő csúcsa $A(0; 4)$, $B(4; 4)$ és $C(4; 0)$ koordinátájú pont, és többi csúcsának koordinátái is nem negatív egész számok? (A konvex sokszög minden belső szöge 180 foknál kisebb.)

Egy ilyen háromszög van, maga az $ABC$ háromszög.

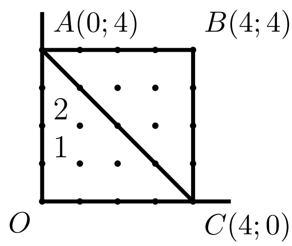
Négyszögek száma: az $ABCD$ négyszögek negyedik csúcsát (mondjuk $D$) azon rácspontok alkotják, amelyek az $AD$ egyenestől jobbra, az $AC$ egyenestől balra helyezkednek el, s ide értjük az x és y tengely nem negatív koordinátájú pontjait is, de az $AC$ egyenes pontjait nem. Vagyis az $AOC$ háromszögben vagy a határán, de nem az $AC$ egyenesen. Ezek száma $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ négyszög.




Ötszögek száma: $CBADE$ ötszögek $D$ és $E$ csúcsai is a négyszögeknél leírt tartományban lesznek. A $D$ csúcs számára szóba jöhető pontnál beírtuk, hogy az $E$ pont hányféleképpen választható meg. Pl.: $(0; 3)$ koordinátájú pontnál 6 szerepel, ami azt jelenti, hogy ezt választva $D$-nek hatféleképpen rendelhető hozzá megfelelő $E$ pont. Tehát ezek száma: $6+4+2+3+2+1 = 18$ lehetőség.




Hatszögek száma: Az $CBADEF$ hatszögek $D$, $E$ és $F$ csúcsai is a négyszögeknél leírt tartományban lesznek. A $D$ csúcs számára szóba jöhető 2 pontnál beírtuk, hogy az $E$ és $F$ pont hányféleképpen választható meg. Tehát ezek száma: $2 + 1 = 3$ lehetőség.




Hétszöget már nem lehet kijelölni. Tehát a megoldások száma: $10 + 18 + 3 = 31$.

5. Tamás elfelejtette a vidéki barátja vezetékes telefonszámát. A következőkre emlékszik: balról számítva az első számjegye 5, a szám hatjegyű, páros, továbbá 4- gyel, 5-tel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel és 13-mal osztva ugyanazt a nullától különböző maradékot adja. Mi volt az elfelejtett telefonszám?

A 4-gyel való osztás miatt a maradék 1, 2, 3 lehet. Ha a maradék páros, akkor az csak 2 lehet. Jelölje $T$ a keresett telefonszámot. Ekkor $T - 2$ osztható 4-gyel, 5-tel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel és 13- mal. Ha egy szám osztható 7-tel, 11-gyel és 13-mal, akkor 1001-gyel is.

Az ilyen számok $\overline{5ab5ab}$ alakúak. De $T$ osztható 4-gyel, 5-tel, 9-cel is, így osztható ezek legkisebb közös többszörösével a 180-nal is. Tehát keresnünk kell a 180180 számnak egy olyan többszörösét, amely ötössel kezdődik. Ez lesz a $T - 2 = 540540$, tehát $T = 540542$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk arról, hogy ez a szám megfelel a feladat követelményeinek, több megoldás pedig nincs.

*Megjegyzés.* Sokat rövidítünk a megoldáson, ha észrevesszük, hogy $T-2$ osztható 4-gyel, 5-tel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel és 13-mal. Ezen számok legkisebb közös többszöröse 180180. Ennek egyetlen többszöröse kezdődik 5-össel, ez pedig az 540540. Tehát a keresett telefonszám 540542.

## 5. osztály, 1. nap — Országos döntő

1. **Egy osztási műveletben az osztandó és az osztó összege 2289. A hányados 17, a maradék 111. Határozd meg az osztandót és az osztót!**

A megoldás során az „osztandó = hányados · osztó + maradék” összefüggést fogjuk felhasználni. Vonjuk le a maradékot a 2289-ből, az eredmény 2178 lesz. Mivel a hányados 17, ezért az osztandó 17-szerese az osztónak. Osszuk a 2178-at 18 egyenlő részre, megkapjuk az osztót, ami 121 lesz, majd ezt szorozzuk 17-tel, az eredmény 2057, majd adjuk ehhez a maradékot: $2057 + 111 = 2168$. Tehát 2168 az osztandó.

Ellenőrzés: az osztó és az osztandó összege $2168+121 = 2289$. S valóban $2168 = 121\cdot17+111$.

2. **Domi néhány gyümölcs súlyát hasonlította össze egy mérlegen. 2 alma egyensúlyt tartott 3 körtével, 1 barack pedig 3 szilvával. Ha az egyik serpenyőbe egy fél dinnyét, a másikba 15 körtét, 4 almát és 6 szilvát tett, akkor a mérleg egyensúlyban volt. Ehhez hasonlóan egy egész dinnye 40 barackkal és 10 almával tartott egyensúlyt. Hány barack súlya egyezett meg 3 körte súlyával? (Feltételezzük, hogy az egynemű gyümölcsök darabonkénti súlya egyenlő.)**

Ha fél dinnye = 15 körte + 4 alma + 6 szilva, akkor 1 dinnye = 30 körte + 8 alma + 12 szilva. Ha 2 alma = 3 körte, akkor 8 alma = 12 körte, továbbá 10 alma = 15 körte. Ha 1 barack = 3 szilva, akkor 4 barack = 12 szilva. Így 1 dinnye = 30 körte + 12 körte + 4 barack = 42 körte + 4 barack. Mivel 1 dinnye = 40 barack + 10 alma = 40 barack + 15 körte, ezért 42 körte + 4 barack = 40 barack + 15 körte. Ebből azt látjuk, hogy 27 körte = 36 barack, amiből következik, hogy 3 körte = 4 barack. A válasz: 4 barack súlya egyezik meg 3 körte súlyával.

*Megjegyzés.* Az egyes gyümölcsök súlyának aránya: szilva : barack : körte : alma : dinnye = 1 : 3 : 4 : 6 : 180.

3. Nemrég Bécsbe utaztam és egy laptopot vásároltam. A zsebemben csak 2 és 5 eurós érmék voltak, mindegyikből 300 darab. Arra jöttem rá, hogy az ára 50-féleképpen fizethető ki ezen érmékkel, de csak 2 euróssal nem tudtam volna kifizetni. Mennyibe kerülhetett a laptop?

Két lehetőség fordulhat elő: a laptop ára egy páratlan szám volt vagy drágább, mint amit ki lehet fizetni az összes két euróssal.

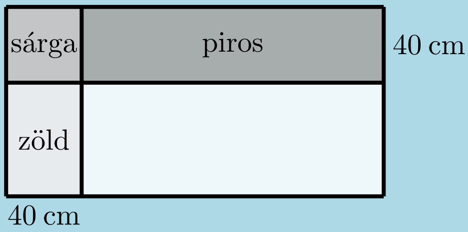
I.eset: A laptop ára egy páratlan szám volt, különben 2 euróssal ki tudtam volna fizetni. Vegyük észre, hogy a fizetésnél használt 5 eurósok száma páratlan kell legyen. Ez már mindent meghatároz. Legyen a fizetendő összeg S, ebből vonjunk le $(2n-1)\cdot 5$ eurót. Az eredmény páros lesz, s fele ennyi 2 eurósra van szükség a fizetésnél. A kifizetések valójában csak abban különböznek egymástól, hogy valahányszor 2 darab ötöst kettesekre váltunk, vagy ennek fordítottját végezzük el. Tehát az S értéke valamint az ötösök száma egyértelműen meghatározza a kettesek számát. Az ötvenedik páratlan szám a 99. $99\cdot 5 = 495$ euró is lehetett a laptop ára, de lehet, hogy 497, 499, 501 vagy 503. Öt megoldás is van. A 495 euró kifizetése így alakul:

1. lehetőség 1 db 5-ös és 245 db 2-es.
2. lehetőség 3 db 5-ös és 240 db 2-es,
3. lehetőség 5 db 5-ös és 235 db 2-es,
...
49. lehetőség 97 db 5-ös és 5 db 2-es,
50. lehetőség 99 db 5-ös és 0 db 2-es.

A 497-et, 499-et, 501-et, 503-at hasonlóan fizetjük ki, csak ott 1, 2, 3 illetve 4 darab 2 euróssal többet adunk.

II.eset: Ha $300\cdot 2$ eurónál , azaz 600 eurónál drágább a laptop, akkor a következő esetek fordulhatnak elő: 1610 euró$=300\cdot 2+202\cdot 5 = 295\cdot 2+204\cdot 5 = ... = 55\cdot 2+300\cdot 5$ vagy 1608 euró$=299\cdot 2+202\cdot 5 = ... = 54\cdot 2+300\cdot 5$ vagy 1606 euró$=298\cdot 2+202\cdot 5 = ... = 53\cdot 2+300\cdot 5$ vagy 1604 euró$=297\cdot 2+202\cdot 5 = ... = 52\cdot 2+300\cdot 5$ vagy 1602 euró$=296\cdot 2+202\cdot 5 = ... = 51\cdot 2+300\cdot 5$ vagy 1605 euró$=300\cdot 2+201\cdot 5 = 295\cdot 2+203\cdot 5 = ... = 55\cdot 2+299\cdot 5$ vagy 1603 vagy 1601 vagy 1599 vagy 1597 euró$=296\cdot 2+201\cdot 5 = ... = 51\cdot 2+299\cdot 5$.

4. Egy téglalap alakú fehér vásznat a felső (hosszabb) széle mentén egy 40 cm-es sávban piros színű fénnyel, a bal szélén szintén egy 40 cm-es sávban zöld színű fénnyel világították meg. Ettől a vászon bal felső sarka egy négyzet alakban sárga színűnek látszott. Négyszer akkora terület maradt fehér, mint amekkora zöld színű lett és a sárga rész mindössze hatoda a fehér területnek. Hány deciméter hosszúak a vászon oldalai?



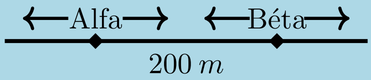

A sárga rész területe $40\text{cm} \cdot 40\text{cm} = 1600cm^2 = 16\text{dm}^2$. Ebből a fehér rész területe: $6 \cdot 16\text{dm}^2 = 96\text{dm}^2$. A zöld rész területe: $96\text{dm}^2 : 4 = 24\text{dm}^2$. A zöld rész ismeretlen oldala $24\text{dm}^2 : 4\text{dm} = 6\text{dm}$, így a vászon rövidebb oldala $6\text{dm} + 4\text{dm} = 10\text{dm}$. A fehér rész területe 4-szerese a zöldének és egyik oldaluk közös, ezért a fehér rész hosszabb oldala $4 \cdot 4\text{dm} = 16\text{dm}$ és így a vászon hosszabb oldala $4\text{dm} + 16\text{dm} = 20\text{dm}$. Tehát a vászon oldalainak hossza 10 dm és 20 dm.

5. Mennyi a négyjegyű palindrom számok összege? (Egy egész szám palindrom, ha visszafelé olvasva önmagát kapjuk, pl. 3443, 2002, stb.)

*Első megoldás.* Egy négyjegyű palindrom számot egyértelműen meghatározza az első két jegye. Az első számjegy kilencféle, a második tízféle lehet, tehát négyjegyű palindrom szám van. Az összegüket megkapjuk, ha minden egyes számjegyre megvizsgáljuk, hogy hányadik helyi értéken hányszor szerepel. Összegezzük az ezresek és az egyesek helyén álló értékeket! Ha az ezresek helyén 1-es van, akkor az egyesek helyén is, de a két középső jegy azonos és tízféleképpen választható meg. Ezek összege $10 \cdot (1000 + 1) = 10010$. Hasonlóan a többi $10 \cdot (2000 + 2) = 20020$, $10 \cdot (3000 + 3) = 30030$, ... $10 \cdot (9000 + 9) = 90090$. Összegezve $10 \cdot 1001 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 9) = 10010 \cdot 45 = 450450$. Most összegezzük a százasok és a tízesek helyi értékén lévő számokat! Ha itt 1-es áll, akkor egyszeri előfordulása 110-et ér, de az ezresek helyén lévő jegy 9-féle lehet, tehát szoroznunk kell 9-cel. Az összegzés így alakul: $9 \cdot (110 + 220 + 330 + \cdots + 990) = 9 \cdot 4950 = 44550$ Az eredmény $450450 + 44500 = 495000$.

*Második megoldás.* A négyjegyű palindrom számok $\overline{abba}$ alakúak. Az első megoldásban leírtak alapján 90 darab van. Összegezzük először $\overline{1bb1} = 1001 + 110 \cdot b$ alakúakat. Itt a b értéke 0-tól 9-ig mindenféle számjegy lehet, tehát 10-féle. Az összeg $1001 \cdot 10 + 110 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 9) = 10010 + 110 \cdot 45 = 14960$. Összegezzük másodjára a $\overline{2bb2} = 2002 + 110 \cdot b$ alakúakat. Az előzőhöz hasonlóan összegezve az összeg $2002 \cdot 10 + 110 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 9) = 20020 + 110 \cdot 45 = 24970$. Összegezzük végül a $\overline{9bb9} = 9009 + 110 \cdot b$ alakúakat. Az előzőhöz hasonlóan összegezve az összeg $9009 \cdot 10 + 110 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 9) = 90090 + 110 \cdot 45 = 95040$. A most kapott 9 értéket is összegezzük: $10010 + 20020 + \cdots + 90090 + 110 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 9) \cdot 9$. Kiemelések után $10 \cdot 1001 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 9) + 110 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 9) \cdot 9 = 450450 + 44550 = 495000$.

1. Mateklandon csak egy, nyílegyenes, nagyon hosszú út létezik, amely mentén található két város, Alfa és Béta. Távolságuk 200 km. Egyenletes sebességgel egyszerre indul Alfából egy kerékpáros, Bétából pedig egy motoros, az útról sehol sem térhetnek le. A kerékpáros 20 km-t, a motoros 45 km-t tesz meg óránként. Milyen távol lehetnek egymástól 2 óra múlva? (A 2 óra alatt visszafordulni, megállni tilos volt!)




A feladat nem egyértelmű. Négyféleképpen is értelmezhető.

a) Lehet, hogy a két ember egymással szembe megy. A távolság: $200 - (20 \cdot 2 + 45 \cdot 2) = 70$ km.

b) Lehet, hogy mindketten jobbra mennek. A távolság: $200 + 45 \cdot 2 - 20 \cdot 2 = 250$ km.

c) Lehet, hogy mindketten balra mennek. A távolság: $200 + 20 \cdot 2 - 45 \cdot 2 = 150$ km.

d) Lehet, hogy egymásnak hátat fordítva – mintegy a Földet megkerülve – haladnak. A távolság: $200 + 20 \cdot 2 + 45 \cdot 2 = 330$ km.

2. Az ábrán látható négyzet mind a kilenc mezejében eredetileg a 0 számjegy szerepelt. Egy lépés során kiválasztunk egy négy mezőből álló négyzetet, és benne lévő mind a négy szám értékét 1-gyel növeljük. 100 lépés után az ábrán látható számokhoz jutottunk el. Határozzátok meg $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ értékét!

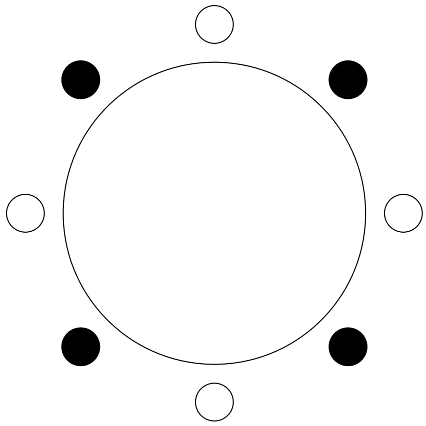
| | | |
|---|---|---|
| 15 | $a$ | 29 |
| $b$ | $c$ | $d$ |
| 40 | $e$ | $f$ |

Az $a$ értékét két tény határozza meg. Egyrészt az, hogy a bal felső sarokban lévő négyzet számait hányszor növeltük, másrészt pedig az, hogy a jobb felső négyzet számait hányszor növeltük. Ezek összege adja a értékét. Ez most $15 + 29 = 44$ lesz. Hasonlóan $b$ értéke $15 + 40 = 55$ lesz. A $c$ értéke biztosan 100, mert a középső mező érintkezik mind a négy sarki mezővel, így értéke is minden lépésben 1-gyel nő. Egy lépésben csak az egyik sarki mező értéke nőhet, ezért $15 + 29 + 40 + f = 100$, tehát $f = 16$. Az $e = 40 + 16 = 56$, $d = 29 + 16 = 45$. Lent látható a kész táblázat.

| | | |
|---|---|---|
| 15 | 44 | 29 |
| 55 | 100 | 45 |
| 40 | 56 | 16 |

3. Artúr király kerek asztalánál nyolcan ülnek. A szomszédos lovagok haragban vannak, különben a lovagok között barátság van. Hányféleképp lehet kiválasztani 3 lovagot, akik barátságban vannak?

Tekintsük a mellékelt ábrát!



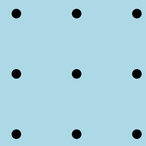
Választhatunk a fehér lovagok közül hármat, vagy a fekete lovagok közül hármat. Ha a 4 fehér lovag közül 3-at kiválasztunk, akkor egy fehér lovagot nem választunk. Ez a fehér lovag 4-féle lehet. Ugyanígy 4-féleképp választhatunk három fekete lovagot. Választhatunk még egy fehér lovagot és hozzá két „szemközt" ülő (vele nem szomszédos) fekete lovagot, ez is 4-féleképp tehető meg. Hasonlóan választhatunk egy fekete és két fehér lovagot. A három lovag kiválasztása $\underline{4+4+4+4=16\text{-féleképpen történhet}}$.

4. Egy könyvtárban egy 9 kötetes lexikon kötetei rendetlenül helyezkednek el az ábrán látható sorrendben. A könyvtáros szeretné minél kevesebb fogással rendezni a könyveket. Egy fogás alatt azt értjük, hogy egyidejűleg megfogunk 2 tetszőleges helyen lévő könyvet, s valahová letesszük: a sor elejére vagy végére, vagy valamelyik két könyv közé betesszük. A két megfogott könyvet nem választhatjuk el egymástól és sorrendjüket sem cserélhetjük fel. Két, már letett könyv között szabad rést nyitni két új könyv számára. A fenti szabályok megtartása mellett hogyan lehet a könyveket három fogással rendezni?

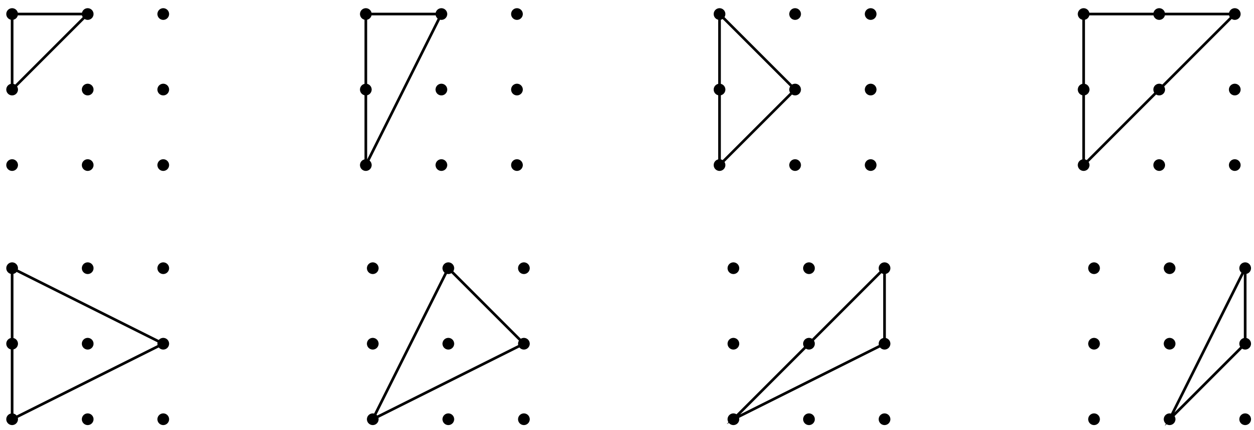
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | 2 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 |

A 3. és a 6. könyvet fogjuk össze, helyezzük be a 2. és 7. közé. Ekkor a sorrend 1, 5, 9, 2, 3, 6, 7, 8, 4. Az 5. és a 9. kötetet fogjuk össze, tegyük le a 4-től jobbra. Az új sorrend 1, 2, 3, 6, 7, 8, 4, 5, 9. Végül a 4. és 5. kötetet összefogva tegyük a 3. és a 6. közé. Kész a megfelelő sorrend.

5. A jobb oldali ábrán 9 pontot láthatunk 3 x 3-as elrendezésben. Hány olyan különbözőnek tekinthető háromszög van, amelynek csúcsai a 9 pont közül kerülnek ki? Két alakzatot akkor mondunk különbözőnek, ha sem tükrözéssel, sem mozgatással nem hozhatók fedésbe. A rajzaid elkészítéséhez használd a segédlapot! Mindegyik háromszöget másik ábrán rajzold meg!



A lehetőségek felsorolásával válaszolunk. Összesen 8 lehetőség van.



**6. osztály, 1. nap** **Országos döntő**

1. 2013-ban a Kalmár László Matematika Verseny harmadik (országos) fordulójába a második (megyei) forduló résztvevőinek 3/40-ed része jutott be. Ezeknek pontosan a 2/9-ed része nyert a döntőben (harmadik forduló) díjat vagy oklevelet. Egy első, egy második és két harmadik díjat osztottak ki. Ezeken kívül négy további tanuló kapott oklevelet egy-egy feladat kiemelkedő megoldásáért. Hányan vettek részt a verseny második fordulójában?

*Első megoldás.* A szövegből kiolvasható, hogy 4 tanuló kapott díjat, további 4 pedig oklevelet. Ez összesen 8 tanuló. A 3/40-ed rész 2/9 része az egésznek $\frac{3}{40} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{360} = \frac{1}{60}$. Az 1 hatvanad résznek megfelel 8 tanuló, tehát $8 \cdot 60 = 480$ tanuló indult a versenyen. Ellenőrzés: a 480 3/40-ed része 36 fő, ennek a 2/9-ed része 8 tanuló.

*Második megoldás.* A döntőben 8 tanuló képezi a létszám 2/9-ét, így a döntőben 36 tanuló vett részt. A 36 tanuló adja a második forduló létszámának 3/40-ét, vagyis az 1/40 rész éppen 12 tanuló. Tehát $12 \cdot 40 = 480$ tanuló szerepelt a második fordulóban. Ebben az esetben nincs szükség külön ellenőrzésre.

2. A következő feladatban egyforma betűk egyforma számjegyeket jelölnek, különböző betűk különbözőket. A □-ok (téglalapok) a négy alapművelet jelét helyettesítik. Tehát az egyik feladat összeadás, egy másik kivonás, egy harmadik szorzás, egy negyedik osztás. Melyik betű melyik számjegyet jelenti, illetve az egyes feladatokban milyen műveleti jelet kell beírni ahhoz, hogy helyes műveleteket kapjunk?

(1) $\overline{aaa} \,\square\, c = \overline{adde}$ (2) $\overline{ccc} \,\square\, f = \overline{fff}$

(3) $\overline{adde} \,\square\, c = \overline{ccc}$ (4) $\overline{fff} \,\square\, g = \overline{fhd}$

Az (1)-ben az első komponensnél nagyobb az eredmény („növelő művelet”), ezért ez csak összeadás vagy szorzás lehet. Összeadás nem lehet, mert az eredmény csak 1-essel kezdődhet, de akkor az első tag is 1-essel kezdődne, így a szám legfeljebb 119 lenne. Ehhez egy egyjegyű számot adva nem kaphatunk négyjegyű számot. Tehát az (1) szorzás.

A (2) nem lehet összeadás, hiszen megváltozik a százas helyi értéken lévő számjegy, vagyis a tízes helyi értéken csak 9-es számjegy lehet, hiszen egy egyjegyű számot adunk a háromjegyűhöz. De ekkor $\overline{ccc}$ 999 lenne, ami nem lehet. Hasonlóan kivonás sem lehet, mert akkor c-nek 0-nak kellene lennie. Vagyis (2) egy osztás.

A (3)-ban az első komponensnél kisebb az eredmény („csökkentő művelet”), ezért a megmaradt összeadás és kivonás közül csak kivonás lehet. Mivel egy négyjegyű számból egy egyjegyű számot kivonva egy háromjegyű számot kaptunk, ebből azonnal kapjuk, hogy $a = 1, d = 0, c = 9$ és emiatt $e = 8$. Visszatérve (2)-höz egyértelműen kapjuk, hogy $999 : 3 = 333$, vagyis $f = 3$.

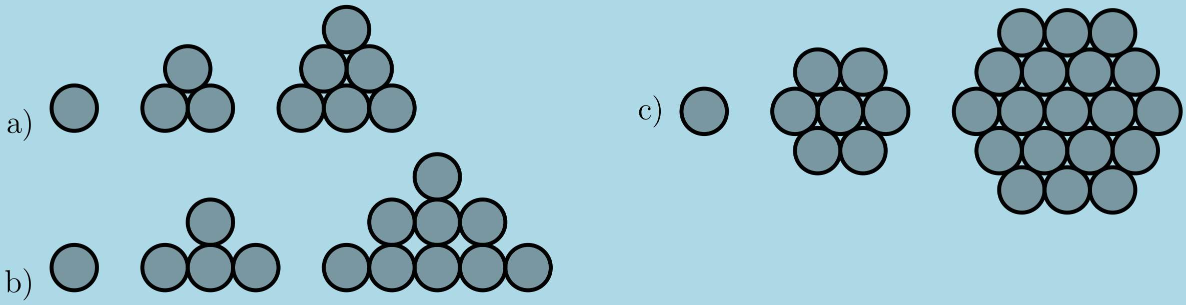
A (4) most már csak összeadás lehet $333 + g = \overline{3h0}$, vagyis $g = 7, h = 4$.

A teljes megoldás: (1) $112 \cdot 9 = 1008$ (2) $999 : 3 = 333$ (3) $1008 - 9 = 999$ (4) $333 + 7 = 340$.

3. Hány olyan különbözőnek tekinthető téglatest van, amelynek mindegyik éle – centiméterekben kifejezve – egész szám és az élek hossza legalább 2 cm, legfeljebb 8 cm? (Két téglatestet akkor mondunk különbözőnek, ha semmilyen térbeli mozgatással nem hozhatók fedésbe.)

A keresett téglatestnek lehet 3 egyforma hosszú oldala (kocka), pontosan 2 egyforma hosszú oldala (négyzetes oszlop) és lehet olyan is, hogy bármely két oldal különböző hosszú (nevezzük „általános” téglatestnek). Számoljuk meg, hogy melyikből mennyi van: A keresett téglatestek között lesz 7 db kocka. A négyzetes oszlopok alaplapjának élét hétféleképpen választhatjuk, de az oldalélt már csak hatféleképpen. A lehetőségek száma $7 \cdot 6 = 42$-féle téglatest. Az „általános téglatestek” (tehát most kizárjuk a kockákat és a négyzetes oszlopokat) éleit $7 \cdot 6 \cdot 5$-féleképpen választhatjuk meg. Vegyük észre, hogy az így kapott mindegyik számhármas hat olyan téglatestet szolgáltat, amelyek nem különbözők. Tehát ezen értéket osztani kell 6-tal. Tehát ezek száma $7 \cdot 5 = 35$. Összesen $7 + 42 + 35 = 84$ különbözőnek tekinthető téglatest lesz.

4. Figyeld meg az ábrák szabályszerűségeit az egyes sorokban. Hány korong van a 100. ábrán az a), a b) illetve a c) sorban?




Alkalmazzuk a „kis Gauss”-módszert.

a) A korongok száma az előző ábrához képest mindig a következő természetes számmal növekszik (2-vel, 3-mal, 4-gyel stb.). A 100. ábrán emiatt $1+2+3+\cdots+100=\frac{100\cdot 101}{2}=5050$ korong van.

b) A korongok száma az előző ábrához képest mindig a megfelelő páratlan számmal növekszik. Pl. a 6. ábránál a hatodik páratlan számmal. A páratlan számokat kell összegeznünk 1-től 199-ig. Ez pontosan 100 darab páratlan szám. $1+3+5+\cdots+199=\frac{100\cdot 200}{2}=10000$. Mindkét esetben segít az a gondolat, hogy a számokat párosítjuk, az első esetben az 1-et a 100-zal, 2-t a 99-cel stb., a második esetben pedig az 1-et a 199-cel, 3-at a 197-tel stb.

c) A korongok száma az előző ábrához képest mindig hattal többel nő, mint korábban. Vagyis a második ábrán 6-tal, a harmadikon 12-vel, a negyediken 18-cal több korong van, mint az előző ábrán. Ezért a 100. ábrán lévő korongok számát így kaphatjuk meg:

$$1+6+2\cdot 6+3\cdot 6+\cdots+99\cdot 6=1+6\cdot(1+2+3+\cdots+99)=1+6\cdot\frac{99\cdot 100}{2}=29701.$$

5. Melyik az a tízes számrendszerben felírt legkisebb pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy 2-esre végződik, és ha ezt a kettest a szám végéről áthelyezzük a szám elejére, akkor a szám kétszeresét kapjuk?

A szorzat és a szorzandó jegyei ugyanazok, de a szorzatban eggyel kisebb helyi értéken állnak. A szorzat egyesei helyén értelemszerűen 4 áll. De akkor a szorzandó tízesei helyén is 4 áll. Ennek 4-szerese 8, ezt írjuk a szorzat tízesei helyére, de ez kerül a szorzandó százasai helyére is. Folytatva az eljárást megkapjuk a keresett számot: 105 263 157 894 736 842 A helyes szorzás: $105263157894737842\cdot 2=210526315789473684$ Meddig kell folytatni az eljárást? Addig, amíg alul meg nem jelenik a 2-es számjegy. Akkor lehetünk biztosak abban, hogy felső szám kétszerese az a szám, aminek az utolsó 2-es számjegyét az elejére vittünk.

6. osztály, 2. nap — Országos döntő

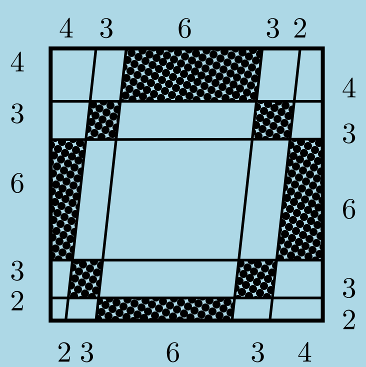
1. Egy amerikai nagyvárosban 2014 ház egyetlen sorban helyezkedik el. Minden ház után adót kell fizetni. Az első és az utolsó ház kivételével minden ház adója 1 dollárral kevesebb, mint a két szomszédja által fizetett adó szorzata. Hány dollárt fizetett a 2014 háztulajdonos összesen, ha az első ház adója 2 dollár, a második ház adója pedig 3 dollár?

Az első két ház adója alapján kiszámítható a harmadik, hiszen ott annyi az adó, hogy 2-vel megszorozva 4-et (3+1-et) kell kapnunk. Vagyis a harmadik ház adója 2. Hasonlóan a negyediké 1 (olyan számot keresünk, amivel a hármat megszorozva 2-nél eggyel nagyobbat, vagyis 3-at kapunk), az ötödiké szintén 1, a hatodiké 2, a hetediké 3. Mivel bármely két szomszédos ház adója ismeretében egyértelműen meghatározható a következő ház adója, és ismét két szomszédos házban 2, illetve 3 dollár az adó, ezért innentől kezdve ugyanaz a számolás adja az adó mértékét, mint az előbb. Vagyis innentől kezdve ismétlődik a sorozat, ami tehát így néz ki: 2, 3, 2, 1, 1 — 2, 3, 2, 1, 1 — 2, 3, 2, 1, 1 — ... — 2, 3, 2, 1, 1 — 2, 3, 2, 1 Az is bizonyított ezáltal, hogy egy periódus 5 számból áll. 2014-ig van 402 darab öt hosszú sorozat és még 4 szám. Egy ötös periódusban a számok összege 9. Az eredmény tehát: $402 \cdot 9 + 8 = 3626$.

2. Határozzátok meg azon $a$, $b$, $c$ törzsszámokat (prímszámokat), amelyek kielégítik a következő egyenlőséget: $2 \cdot a + 3 \cdot b + 8 \cdot c + 8 \cdot c^2 = 2458$!

Vegyük észre, hogy a jobb oldal páros, a bal oldal értéke egy tag kivételével mind páros. Tehát itt egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha értéke páros. Így csak b=2 jöhet szóba, hiszen a 2 az egyetlen páros prímszám. Helyettesítsük be a b=2 értéket, majd vonjunk le mindkét oldalból hatot. Azt kapjuk, hogy $2 \cdot a + 8 \cdot c + 8 \cdot c^2 = 2452$. Egyszerűsítsünk 2-vel, így $a + 4 \cdot c + 4 \cdot c^2 = 1226$. A fentihez hasonló okoskodással adódik, hogy a=2. Vonjuk le ezen értéket mindkét oldalból $4 \cdot c + 4 \cdot c^2 = 1224$. Osszuk végig 4-gyel: $c + c^2 = 306$. Átalakítva $c(c+1) = 306$, de enélkül is lehet. Tehát keresnünk kell egy olyan prímszámot, amelyet a nála 1-gyel nagyobbal szorozva az eredmény 306. Ez a 17, mert $17 \cdot 18 = 306$. A megoldás $a = 2, b = 2, c = 17$. Ez jó, mert $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 17 + 8 \cdot 17^2 = 2458$.

3. Az $ABCD$ négyzet $DC$ oldalát rendre 4, 3, 6, 3 és 2 cm-es, az $AD$ oldalát pedig 2, 3, 6, 3 és 4 cm-es, az $AB$ oldalt 2, 3, 6, 3 és 4 cm-es, a $BC$ oldalt pedig 2, 3, 6, 3 és 4 cm-es szakaszokra bontottuk. (Lásd ábra!) Mekkora a pöttyözött rész területe cm$^2$-ben mérve?



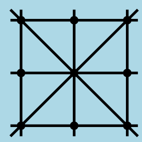

A négyzet oldala 18 cm. Az ábrán láthatunk két olyan paralelogrammát, amelyeknek egyik-egyik oldala 6 cm. Az egyik magassága 4 cm, a másiké 2 cm. Átdarabolható téglalapba, tehát a terület $6 \cdot (2+4) = 36(\mathrm{cm}^2)$. Látható négy olyan paralelogramma, amelyek alapja 3 cm, magassága szintén. Egy ilyen paralelogramma területe 9 cm$^2$, a négyé pedig 36 cm$^2$. A „középső sorban” bal és jobb szélen van egy-egy trapéz. Egymás mellé tolhatjuk őket és téglalapot fognak alkotni. Ennek magassága 6 cm, az „alap” pedig $18-(3+6+3) = 6$ cm. Tehát ezek területe is 36 cm$^2$. A kérdezett terület a fentiek alapján 36 cm$^2 \cdot 3 = 108$ cm$^2$.

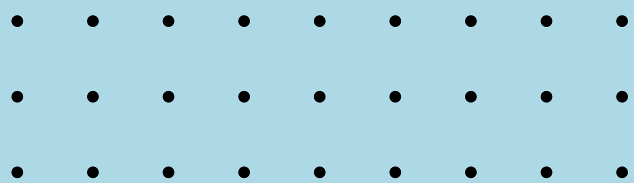
4. Egy nagyobb könyv oldalait 1-től kezdődően megszámozták az egymást követő természetes számokkal. Minden oldalra írtak számot. A számozáshoz háromszor annyi számjegyet használtak fel, mint ahány oldalas volt a könyv. Hány oldalas volt a könyv?

*Első megoldás.* Egy 999 oldalas könyv esetén a pozitív egészek leírásához $9 + 180 + 2700 = 2889$ számjegyet kell felhasználni, míg az oldalszám háromszorosa $3 \cdot 999 = 2997$. Ez utóbbi tehát 108-cal több. Ha csökkentjük az oldalak számát, az oldalszám háromszorosa mindig 3-mal, a számjegyek száma viszont 3-mal, majd 2-vel, végül 1-gyel csökken, a különbségük tehát nem tud csökkenni, így ekkor nem lehetnek egyenlők. Ha növeljük az oldalak számát, akkor az oldalszám háromszorosa továbbra is 3-mal, míg 4-jegyű számok esetén a számjegyek száma mindig 4-gyel nő, vagyis a különbség 1-gyel csökken. Így a 108. négyjegyű számnál, az 1107-nél éppen egyenlő a két érték. További növelés esetén a jegyek száma mindig legalább 4-gyel nő, így ettől fogva mindig ez lesz a nagyobb érték. Tehát az egyetlen megoldás az, hogy a könyv 1107 oldalas.

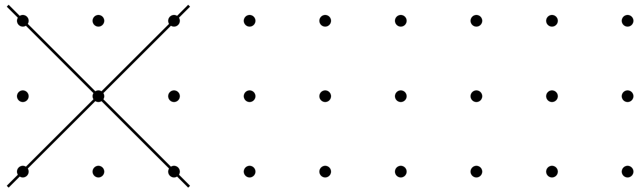
*Második megoldás.* Használjuk fel, hogy a 90 darab kétjegyű szám leírásához 180, a 900 darab háromjegyű szám leírásához 2700 stb. számjegy kell. Vizsgáljuk meg, hogy lehetséges-e, hogy $x$ darab kétjegyű oldalszám van és nincs háromjegyű. Ekkor a feltétel alapján $(9+x) \cdot 3 = 9 + 2 \cdot x$, $27 + 3 \cdot x = 9 + 2 \cdot x$, $x = -18$. Ez nem megoldás! Ha háromjegyű számokat is használunk: $(9+90+x) \cdot 3 = 9+180+3 \cdot x$, $27+270+3 \cdot x = 9+180+3 \cdot x$, $288 = 0$. Ez lehetetlen. Ha négyjegyűeket is használunk: $(9+90+900+x) \cdot 3 = 9+180+2700+4 \cdot x$, $27+270+2700+3 \cdot x = 9+180+2700+4 \cdot x$, $2997+3 \cdot x = 2889+4 \cdot x$, $x = 108$. Tehát 108 darab négyjegyű számot is fel kellett használnunk. Ez azt jelenti, hogy a könyv $999 + 108 = 1107$ oldalas. Világos, hogy ötjegyű oldalszámokkal már nem kaphatunk megoldást. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

5. Az ábrán látható $3 \times 3$-as pontrácson behúztuk azon egyeneseket, amelyek legalább 3 ponton mennek át. Látható, hogy összesen 8 ilyen egyenest találtunk. Hány ilyen tulajdonságú egyenest lehet húzni egy $3 \times 9$-es méretű téglalapon? (Használd a segédlapot!)

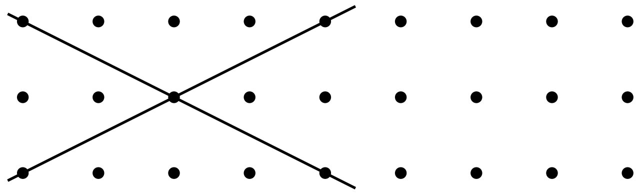




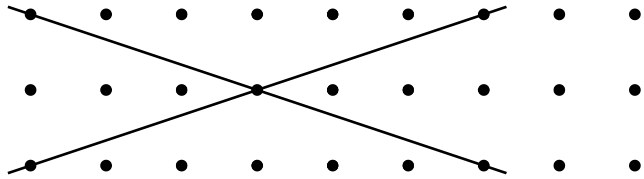
*Első megoldás.* Először is a $3 \times 9$-es pontrácson 3 vízszintes és 9 függőleges egyenest tudunk húzni. Most vegyük azon egyeneseket, amelyek nem párhuzamosak a képzeletbeli x és y tengelyekkel. Ezek mindegyike átmegy a középső sor valamelyik „belső” pontján. A középső sor 7 „belső” pontján áthaladó, a jobb oldali ábrán látható egyenesekkel párhuzamos egyenesből $7 \cdot 2 = 14$ lesz.



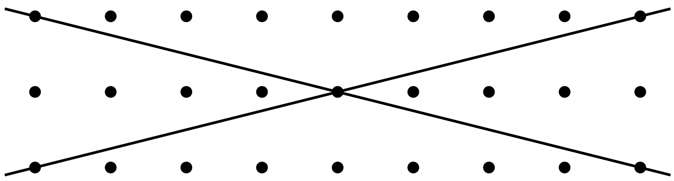
A középső sor 5 „belső” pontján áthaladó, a jobb oldali ábrán látható egyenesekkel párhuzamos egyenesből $5 \cdot 2 = 10$ új egyenest kapunk.



A középső sor 3 „belső” pontján áthaladó, a jobb oldali ábrán látható egyenesekkel párhuzamos egyenesből $3 \cdot 2 = 6$ új egyenest kapunk.



A középső sor középső pontján áthaladó, egyenesből csak az ábrán látható 2 új egyenest kapjuk.



Ez összesen $3 + 9 + 14 + 10 + 6 + 2 = 44$ egyenes.

*Második megoldás.* Továbbra is 3 vízszintes egyenes van az ábrán. A nem vízszintes egyenesek így is számolhatók: fent az i-ediknek lent azonos paritással rendelkező sorszámú pár kell. 5 páratlan és 4 páros i van 9-ig, ezért $5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 41$ nem vízszintes egyenes van. Ehhez még hozzá kell adnunk a 3 vízszintest, tehát $41 + 3 = 44$ a válasz.

1. Az Edison háza előtti kertkaput nehéz volt kinyitni, ezért az egyik barátja megszólta, hogy „Igazán megjavíttathatnád már a kapudat, ez nem illik egy ilyen technikai zsenihez, mint te vagy”. Mire Edison: „A kapumat értelmesen terveztem meg. Rákötöttem a ciszternára (vízgyűjtő medence), s mindenki, aki betér hozzám, 20 liter vizet pumpál a ciszternámba.” Később Edison a 20 literes edényről áttért egy 25 literesre, de ekkor elegendő volt 12-vel kevesebb látogató a ciszterna megtöltéséhez. Hány literes a ciszterna? Hány látogató kellett eredetileg a megtöltéséhez?

Legyen a látogatók száma eredetileg $x$, a nagyobb edénynél pedig $x-12$ fő. Ekkor felírhatjuk a következő egyenletet: $20 \cdot x = 25 \cdot (x-12)$.

Végezzük el a kijelölt műveleteket!

$20 \cdot x = 25 \cdot x - 300$

$5 \cdot x = 300$, innen $x = 60$. Ez azt jelenti, hogy eredetileg 60 vendég tudta telepumpálni a ciszternát, ami $60 \cdot 20 = 1200$ literes.

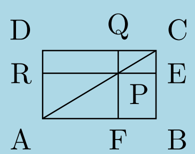
2. Ha a Nyíregyházi Vadaspark Totó nevű kétpúpú tevéje nagyon szomjas, akkor a testtömegének 84 %-a víz. Itatás után 800 kg-ot nyom, s ekkor testtömegének 85 %-a lesz víz. Hány kilogrammos Totó, ha szomjas?

A 800 kg 85%-a $800 \cdot 0,85 = 680$ (kg) a teve víz tartalma, tehát a teve tömege a feltételek szerint 680 kg vízből és 120 kg szárazanyagból tevődik össze. Ez a 120 kg a szomjas teve testtömegének 16%-a. Ha a 16% 120 kg, akkor az 1% 7,5 kg. Így a teve tömege pedig 750 kg. Tehát Totó 750 kg-ot nyom, ha szomjas.

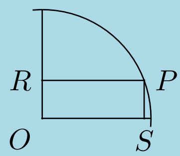
3. Mennyi az A és B átlagának (számtani közepének) pontos értéke, ha $A = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{99}{100}$ és $B = \frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{4}+\cdots+\frac{99^2}{100}$?

Vegyük észre, hogy mindkét kifejezésben 99 tag szerepel. Adjuk össze A és B megfelelő sorszámú tagjait! Az első tagok összege: $\frac{1}{2}+\frac{1^2}{2} = 1$ A második tagok összege: $\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3} = \frac{2+2^2}{3} = \frac{2\cdot(2+1)}{3} = 2$ A harmadik tagok összege: $\frac{3}{4}+\frac{3^2}{4} = \frac{3+3^2}{4} = \frac{3\cdot(3+1)}{4} = 3$ Az utolsó tagok összege: $\frac{99}{100}+\frac{99^2}{100} = \frac{99+99^2}{100} = \frac{99\cdot(99+1)}{100} = 99$. Tehát a keresett összeg $1+2+3+\cdots+99 = 4950$. A kért számtani közép pontos értéke ennek a fele, vagyis $\frac{4950}{2} = 2475$.

4. Az $ABCD$ téglalap $AC$ átlójának tetszőleges pontja legyen $P$. $P$-n át párhuzamosokat húzunk az oldalakkal (Lásd ábra). Igazold, hogy az $RPQD$ téglalap területe egyenlő a $PEFB$ területével.



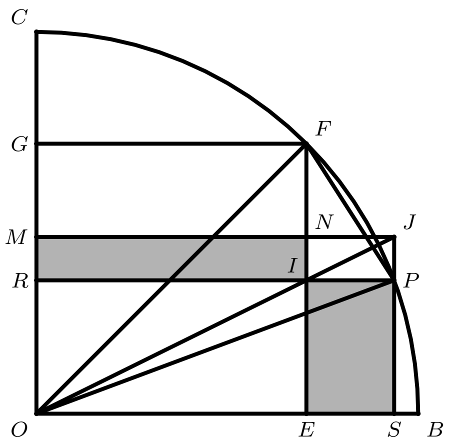

Egy negyed körcikk körívén felvettünk egy tetszőleges $P$ pontot, amelyen át párhuzamosakat húztunk a határoló sugarakkal. Hol kell felvennünk a $P$ pontot ahhoz, hogy a $PROS$ téglalap területe a lehető legnagyobb legyen?




a) Felhasználjuk, hogy az átló felezi a téglalap területét. Tehát az $ADC$ és az $ABC$ háromszögek területe egyenlő. Hasonlóan az $ARP$ és $AFP$ területe is egyenlő, továbbá

$PQC$ és $PEC$ háromszögek területe is egyenlő. Vonjuk le az $ADC$ háromszög területéből $ARP$ és $PQC$ háromszögek területét, marad az $RPQD$ téglalap területe. Ugyanígy az $ABC$ háromszög területéből vonjuk le az $AFP$ és a $PEC$ háromszögek területét: marad a $PEFB$ téglalap területe. Mivel egyenlő területekből egyenlő területeket vettünk el, a kapott területek is egyenlők, tehát az $RPQD$ téglalap területe egyenlő a $PEFB$ területével.

b) Az a) részben kimondott állítást fogjuk alkalmazni. Belátjuk, hogy a téglalap területe akkor maximális, ha a $P$ pont a negyed körív felezőpontjával esik egybe. Legyen a negyed körív felezőpontja $F$. Vegyünk fel egy $F$-től különböző $P$ pontot a $BF$ köríven. Megmutatjuk, hogy az $OEFG$ téglalap területe nagyobb, mint az $OSPR$ téglalap területe (lásd ábra).




Az $EF$ és RP egyenesek metszéspontja legyen $I$, Az $SP$ és $OI$ egyeneseké $J$. A $J$-ből $EF$-re állított merőleges $EF$ egyenest az $N$, $OG$ egyenest az $M$ pontban metszi. Ekkor az OSJM téglalapra alkalmazva a feladat előző részében megfogalmazott állítást azt kapjuk, hogy ESPI téglalap területe megegyezik RIMN téglalap területével. Következésképp az OSPR és az OENM téglalapok területe is egyenlő.

Az ábráról ugyan jól látszik, de bizonyítást igényel, hogy $TOENM < TOEFG$. Ehhez elég belátni, hogy $IN < IF$. Az $OFP\sphericalangle$ az $OFP$ egyenlő szárú háromszög egyik alapon fekvő szöge, így kisebb 90º-nál, belőle a 45º-os $OFE$ szöget elvéve kapjuk, hogy $IFP\sphericalangle < 45^\circ < FPI\sphericalangle$. Mivel nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, az $IFP$ derékszögű háromszögben $IP < IF$.

A P pont választása miatt $FE = FG = OE > PS = IE$. Az $OEI$ derékszögű háromszögben a hosszabb $OE$ befogóval szemben van a nagyobb hegyesszög, tehát $45^\circ < OIE\sphericalangle = NIJ\sphericalangle$. Az $NIJ$ derékszögű háromszögben így $NJ$ a hosszabb befogó, azaz $IN < NJ = IP$. Korábban láttuk, hogy $IP < IF$, tehát valóban $IN < IF$. Így $TOSPR = TOENM < TOEFG$, ezzel az állítást beláttuk. A gondolatmenet hasonlóan alkalmazható az $FC$ köríven felvett $P$ pont esetén is.

*Megjegyzések.* 1. Valójában nincs szükség az a) rész alkalmazására, hiszen $IF > IP$, valamint $RI = OE = EF > SP$ miatt $IF \cdot RI > IP \cdot SP$, így közvetlenül is látszik, hogy az $ESPI$ téglalap területe kisebb a $RIFG$ téglalap területénél, ebből pedig következik a feladat állítása. 2. Egy további megoldást mutatunk a b) részre. A köríven tetszőlegesen felvett $P$ pont esetén Pitagorasz tételét felírva az $OSP$ és $OEF$ derékszögű háromszögekre: $OS^2+SP^2 = OP^2$ és $OE^2+EF^2 = OF^2$. Felhasználva, hogy $OE = EF$, valamint hogy $OP$ és $OF$ egyaránt a negyedkör sugarai, adódik, hogy $OS^2+SP^2 = r^2 = 2\cdot EF^2$. Legyen $OS^2 =$

$EF^2 + x$, és $SP^2 = EF^2 - x$. Az $OSPR$ téglalap területe akkor maximális, ha a négyzete maximális, azaz ha $(OS \cdot SP)^2 = OS^2 \cdot SP^2 = (EF^2 + x)(EF^2 - x) = EF^4 - x^2$ a lehető legnagyobb. Mivel $EF^2$ értéke rögzített (megegyezik $r^2$ felével), ezért a fenti kifejezés akkor és csak akkor maximális, ha $x^2$ minimális, azaz ha $x = 0$. Ekkor pedig $OS^2 = EF^2 = SP^2$ miatt $OS = EF = SP$, tehát $P = F$. Tehát a téglalap területe pontosan akkor maximális, ha $P$-t a negyedkör felezőpontjában vesszük fel.

5. Egy fejszámoló bűvész a közönségével a következő játékot játssza: a közönségből valakit megkér, hogy gondoljon egy olyan tízes számrendszerbeli háromjegyű számra, amelyben nincs 0. Jelöljük a gondolt számot $\overline{abc}$-vel. Ezt csak a közönségnek mondják meg, akik képezik a következő számokat: $\overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$, majd megmondják a bűvésznek ezek összegét, amit $N$-nel jelölünk. Mi volt a gondolt szám, ha $N = 3194$?

A szöveg alapján felírhatjuk, hogy $N = \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$. Vegyük észre, hogy csak az $\overline{abc}$ hiányzik. Adjuk hozzá mindkét oldalhoz: $N + \overline{abc} = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$ A jobboldalt bontsuk fel helyi értékesen! Ezek után az előbbi egyenlőség így írható: $N + \overline{abc} = 222 \cdot (a + b + c)$, azaz $3194 + \overline{abc} = 222 \cdot (a + b + c)$. Átrendezzük: $\overline{abc} = 222 \cdot (a + b + c) - 3194$. A számjegyösszeget innen már kitalálhatjuk, mert $a + b + c > 14$, hiszen $14 \cdot 222 = 3108$ kevés. A $19 \cdot 222 = 4218$ túl sok, mert ekkor $\overline{abc} > 1000$ lenne. Ha $a + b + c = 15$, akkor $\overline{abc} = 136$ adódik, ami nem megfelelő, mert $1 + 3 + 6 = 10$, vagyis nem 15. Ha $a + b + c = 16$, akkor $\overline{abc} = 358$ adódik, ami megfelelő, mert $3 + 5 + 8 = 16$. Ha $a + b + c = 17$, akkor $\overline{abc} = 580$ adódik, ami nem megfelelő, mert $5 + 8 + 0 = 13$, ami nem 17. Ha $a + b + c = 18$, akkor $\overline{abc} = 802$ adódik, ami nem megfelelő, mert $8 + 0 + 2 = 10$, ami nem 18. Tehát a feladatnak egy megoldása van: a 358.

**7. osztály, 2. nap** **Országos döntő**

1. Tamást megkérdezték, hogy hányadik helyen végzett a városi mezei futóversenyen. Ő így válaszolt: „Ha az előttem végzett tanulók negyedrésze utánam következne, akkor hattal többen lennének utánam, mint előttem.” Hányadik lett Tamás a versenyen, ha összesen 97-en indultak?

*Első megoldás.* Egyenlettel. Tamás nélkül 96 tanuló van. Tegyük fel, hogy Tamás előtt $x$ tanuló végzett, ekkor utána $96 - x$. Az előtte végzettek negyedét helyezzük át a szövegnek megfelelően, így előtte már csak $\frac{3}{4}x$ végzett. Mögötte pedig $96 - x + \frac{1}{4}x = 96 - \frac{3}{4}x$. Ez utóbbi 6-tal több, mint a $\frac{3}{4}x$. Írjunk fel egyenletet: $96 - \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}x + 6$. Vonjunk ki mindkét oldalból 6-ot, majd adjunk mindkét oldalhoz $\frac{3}{4}x$-et, kapjuk, hogy $90 = \frac{6}{4}x$, azaz $90 = \frac{3}{2}x$. Tehát $180 = 3x$, s így $x = 60$. Tamás előtt 60-an végeztek, mögötte 36-an. A 60 negyedét (a 15-öt) áttesszük mögé, így már csak 45-en vannak előtte és $36 + 15 = 51$-en mögötte, s a különbség valóban 6. Tehát Tamás a 61. helyen végzett a versenyen.

*Második megoldás.* Logikai úton. Olvassuk a szöveget „visszafelé”: „...akkor hattal többen lennének utánam, mint előttem.” Küldjünk el 6 tanulót, akkor előtte és utána is ugyanannyian végeztek. $96 - 6 = 90$, aminek a fele előtte, fele utána végzett. Ez 45-45 fő. Ez a 45 fő az előtte végzettek 3 negyede, tehát az 1 negyede 15, a 4 negyed pedig 60 fő. Eredetileg 60 fő végzett előtte, mögötte pedig 46. Tehát Tamás a 61. helyen végzett a versenyen.

2. Egy horgász a napi zsákmánya össztömegének 35%-át kitevő három legnagyobb halat a mélyhűtőbe tette. A három legkisebb halat, amelyek együttesen a megmaradt rész össztömegének 5/13-át tették ki, elvitte a macska, a többit pedig megfőzték ebédre. Hány halat fogott a horgász?

Legyen az össztömeg $X$. Ekkor a nagyhalak mennyisége $0,35 \cdot X$, a kishalak össztömege $\frac{5}{13} \cdot 0,65 \cdot X = 0,25 \cdot X$, ezt vitte el a macska. A „közepes halak" össztömege tehát $X - 0,35 \cdot X - 0,25 \cdot X = 0,4 \cdot X$, ezt főzték meg ebédre. Ez biztosan több mint 3 hal együttes tömege, hiszen a 3 nagy hal is $0,35 \cdot X$. Ha 5 „közepes hal" lett volna, akkor köztük lett volna 3 olyan hal, amelyek össztömege legfeljebb $\frac{3}{5} \cdot 0,4X = 0,24X$-et tesz ki. De a három legkönnyebb is nehezebb ennél. Tehát megmutattuk, hogy háromnál több „közepes halról" van szó, de ötnél kevesebbről, így marad a 4 hal lehetősége. A horgász ezek szerint $3 + 4 + 3 = 10$ halat fogott. Ez megvalósítható pl. a következő módon: 3 hal egyenként $\frac{0,35 \cdot X}{3}$, 4 hal egyenként $0,1 \cdot X$, 3 hal pedig egyenként $\frac{0,25 \cdot X}{3}$.

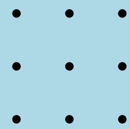
3. Keressétek meg az összes olyan egész számot, amely lehet egy szabályos sokszög belső szögének fokban kifejezett mérőszáma.

Az $n$ oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege $(n-2) \cdot 180^o$. Tudjuk, hogy egy szabályos sokszög minden belső szöge egyenlő, ezért minden csúcsnál a belső szög nagysága $\frac{(n-2) \cdot 180^o}{n} = \frac{n \cdot 180^o - 360^o}{n} = 180^o - \frac{360^o}{n}$. Vagyis azt kell megvizsgálnunk, hogy milyen $n \geq 3$ egész szám esetén lesz a $180^o - \frac{360^o}{n}$ is egész. A $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ osztóit kell megkeresnünk, de kihagyjuk az 1, 2 értékeket, mert ilyen oldalszámmal nem létezik sokszög. 22-féle olyan szabályos sokszög van, amelyben a belső szögek fokokban mért mérőszáma egész szám. Az oldalak száma a következő 22 szám lehet: 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360. Az $n$ oldalszám ismeretében a $180^o - \frac{360^o}{n}$ képlettel kiszámítjuk a megfelelő szabályos sokszög egy szögének mérőszámát. A következő számokat kapjuk: 60, 90, 108, 120, 135, 140, 144, 150, 156, 160, 162, 165, 168, 170, 171, 172, 174, 175, 176, 177, 178, 179.

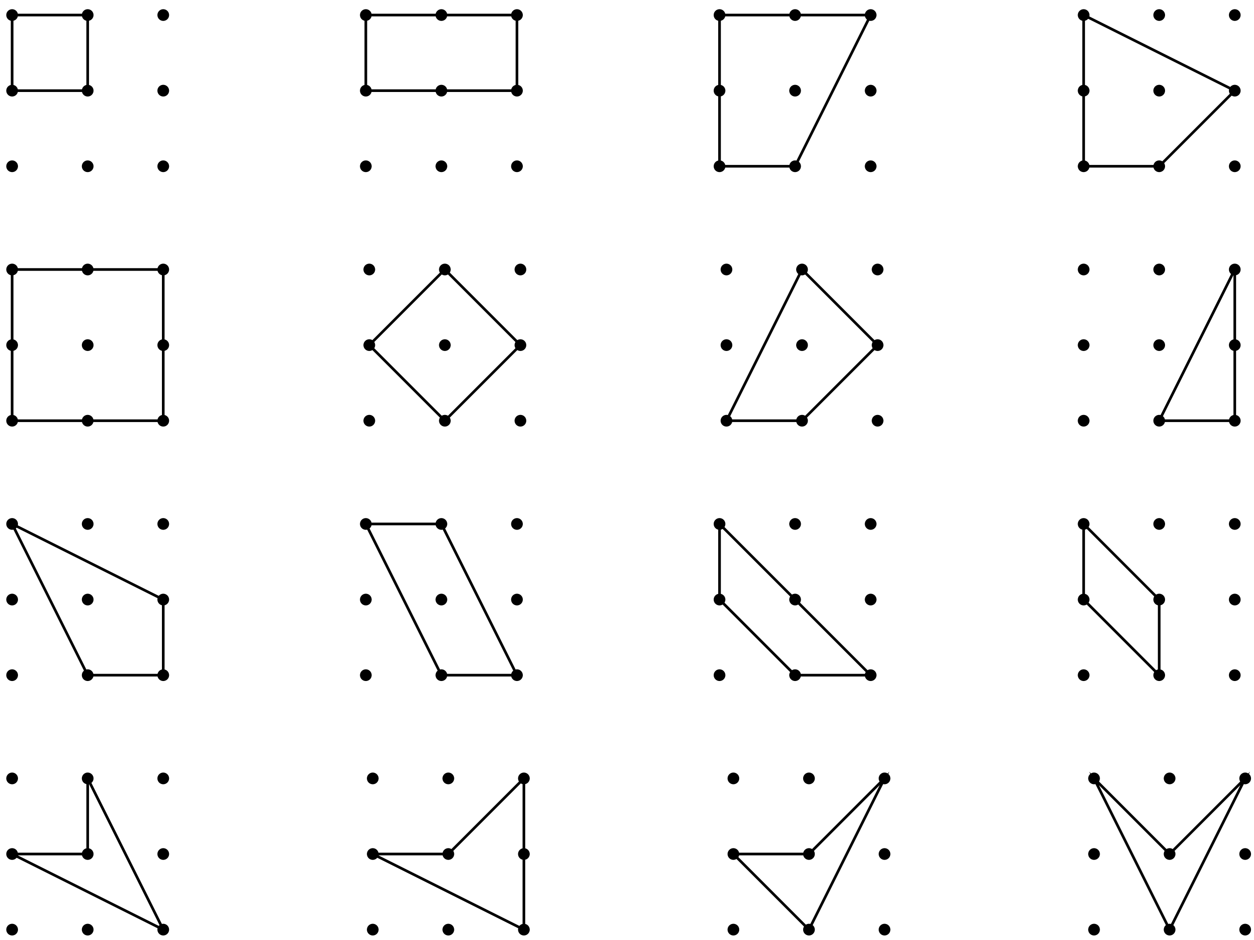
4. Jelöljük a $999^{999}$ számjegyei összegét $A$-val. Legyen $A$ számjegyei összege $B$, a $B$ számjegyei összege pedig legyen $C$. Mivel egyenlő $C$?

A számjegyösszegét felülről becsüljük meg. Mivel $999^{999} < 1000^{1000} = (10^3)^{1000} = 10^{3000}$, ezért $999^{999}$ értéke egy legfeljebb 3001 jegyű természetes szám. Ha ezen szám minden jegye 9-es lenne, akkor a számjegyösszeg 27009 lenne. Tehát $A \leq 27009$. A 27009-nél nem nagyobb természetes számok közül legnagyobb számjegyösszege a 19999-nek van. Ennek számjegyösszege 37, így $B \leq 37$. A 37-nél nem nagyobb természetes számok közül a 29-nek van a legnagyobb számjegyösszege, így $C \leq 11$. Mivel $999^{999}$ osztható 9-cel, ezért csak $C = 9$ lehetséges.

5. A jobb oldali ábrán 9 pontot láthatunk $3\times 3$-as elrendezésben. Hány olyan különbözőnek tekinthető négyszög van, amelynek csúcsai a 9 pont közül kerülnek ki? Két alakzatot akkor mondunk különbözőnek, ha mozgatással nem hozhatók fedésbe. A rajzaid elkészítéséhez használd a segédlapot! Mindegyik négyszöget másik ábrán rajzold meg!



A lehetőségek felsorolásával válaszolunk. Célszerű külön kezelni a konvex és a konkáv négyszögek esetét. Ezen belül a konvex négyszögek csoportosíthatók átlóik „típusa” alapján. Összesen 16 lehetőség van.



8. osztály, 1. nap

Országos döntő

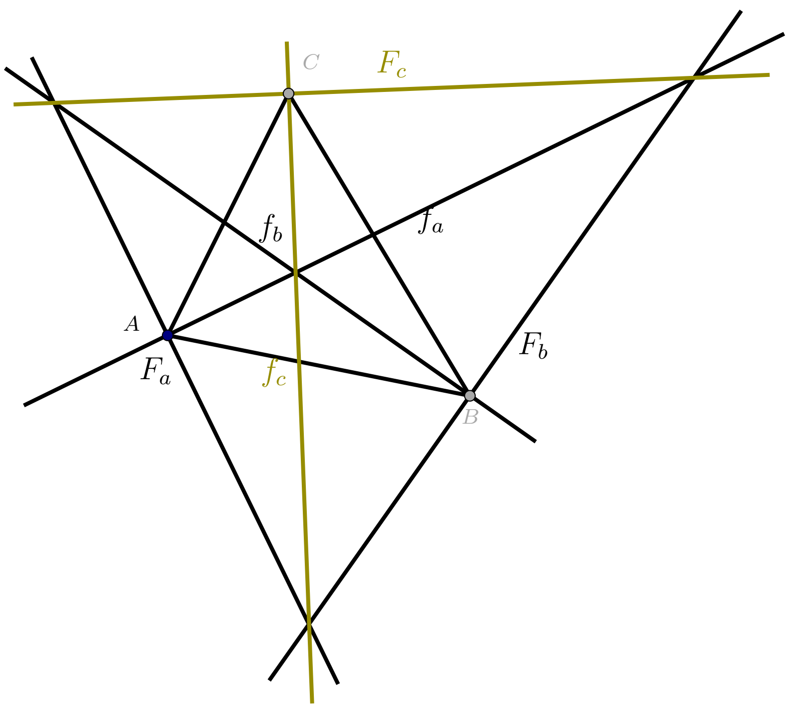
1. A 2014-et felírtuk három természetes szám összegeként úgy, hogy ha az első számot elosztjuk a másodikkal, akkor hányadosként és maradékként is 8-at kapunk. Ha pedig a harmadik számot osztjuk az elsővel, akkor a hányados 6, a maradék pedig 20. Mivel egyenlő ez a három természetes szám?

Legyen $x$ az első szám, a második $y$ és a harmadik $z$. Felírhatjuk a következő egyenlőségeket:
$x + y + z = 2014$ (I)
$x = 8 \cdot y + 8$(II)
$z = 6 \cdot x + 20$(III)
E két egyenlőségből: $z = 6 \cdot (8 \cdot y + 8) + 20$, tehát $z = 48 \cdot y + 68$. Helyettesítsünk (I)-be: $(8y+8)+y+(48y+68) = 2014$. Végezzük el az összevonásokat: $57 \cdot y + 76 = 2014$, ahonnan $y = 34$, $x = 280$, $z = 1700$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a kapott számok helyességéről.

2. Legyenek $x$ és $y$ egész számok, továbbá $x \geq 0$. Hány olyan egész számokból álló $(x; y)$ számpár van, amely kielégíti az $2x^2 - 2xy + y^2 = 289$ egyenletet?

Képezzünk teljes négyzetet $2x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 + x^2 = 289$. Ennek az a tartalma, hogy két négyzetszám összege 289. Írjuk fel 289-ig a négyzetszámokat: 0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; 121; 144; 169; 196; 225; 256; 289 A négyzetszámok végződéseinek összegét figyelembe véve adódik, hogy $289 = 17^2 = 0^2 + 17^2 = 8^2 + 15^2 = 15 + 8^2 = 17^2 + 0^2$. Mivel és $x$ és $y$ egész számok, ezért a következő rendezett $(x; y)$ számpárok teszik igazzá az egyenletet: $(17; 17)$, $(15; 7)$, $(15; 23)$, $(8; 23)$, $(8; -7)$, $(0; 17)$, $(0; -17)$. Tehát 7 ilyen számpár teszi igazzá az egyenletet.

3. Rajzold meg egy háromszög három belső és három külső szögének felezőjét. Ezen hat egyenes közül melyik kettő lehet merőleges egymásra?



Az egy csúcsból induló belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra, mert az általuk felezett szögek összege. Számítással: ha a belső szög $\alpha$, akkor a hozzátartozó külső szög $180^o - \alpha$. A két félszög összege $\frac{\alpha}{2} + \frac{180^o - \alpha}{2} = 90^o$. Ezeken kívül semelyik más párosításban nem lehetnek merőlegesek egymásra.

Két belső szögfelező nem lehet merőleges egymásra, mert akkor az általuk felezett szögek felének összege is derékszög lenne, azaz a két szög összege lenne, ami nem lehet, mert akkor a két oldal párhuzamos lenne.

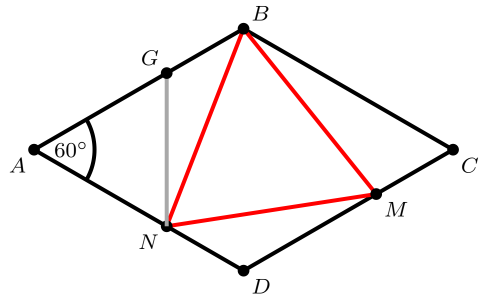
Két külső szögfelező sem lehet merőleges egymásra, hiszen a külső szögfelező merőleges a megfelelő belső szögfelezőre, azaz ha lenne két merőleges külső szögfelező, akkor az ezekhez tartozó belső szögfelezőknek is merőlegeseknek kellene lenniük (egy négyzetet zárna közre a négy egyenes). Egy külső és egy vele nem azonos csúcsból induló belső szögfelező nem lehet merőleges egymásra, mert akkor a külsőhöz tartozó belső szögfelező szintén merőleges erre, s ez párhuzamos lenne egy másik belső szögfelezővel, ami nyilván nem lehet. Másként kifejezve: a külső szögfelezőre két belső szögfelező is merőleges lenne, vagyis két belső szögfelező párhuzamos lenne, ami lehetetlen.

4. Legyen $p$ ötnél nagyobb prímszám. Igazold, hogy a $(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)$ szorzat osztható 360-nal.

$360 = 8 \cdot 9 \cdot 5$, tehát a 360-nal való oszthatóság elégséges feltétele, hogy a szám osztható legyen 8-cal, 9-cel és 5-tel, mert ezek a számok relatív prímek. A „p ötnél nagyobb prímszám” feltétel miatt $p-1$ és $p+1$ két egymást követő páros szám, tehát közülük az egyik 4-gyel is osztható, tehát a $(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)$ szorzat osztható 8-cal. A $p-2$, $p-1$, $p$ valamint $p$, $p+1$, $p+2$ három-három egymást követő természetes szám, tehát van köztük egy-egy 3-mal osztható. Mivel $p$ nem osztható 3-mal, ezért $p-2$, $p-1$ illetve $p+1$, $p+2$ közül egy-egy osztható 3-mal. Tehát az adott kifejezés osztható 9-cel. A $(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)$ szorzatban öt egymást követő természetes szám szerepel, tehát valamelyik osztható 5-tel. Ez nem lehet $p$ a feladat feltétele miatt, tehát az adott szorzat osztható 5-tel is. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

5. Az $ABCD$ rombusz A csúcsnál lévő szöge $60^o$. A rombusz $AD$ oldalának belsejében felvettünk egy $N$ pontot, a $DC$ szakasz belsejében pedig egy $M$ pontot. Igazoljátok, hogy ha a $BMN$ háromszög valamelyik szöge $60^o$, akkor a $BMN$ háromszög szabályos.

*Első megoldás.* Két eset lehetséges: a) Ha az $NBM$ szög $60^o$-os. Tudjuk, hogy a rombuszunk $AD$ oldala egyenlő hosszú a $BD$ átlóval. Az $ABN$ szög egyenlő nagyságú a $DBM$ szöggel, mert mindkettőt az $NBD$ szög egészíti ki $60°$-ra. Ezek alapján az $ANB$ és a $DMB$ háromszögek egybevágók, mert egy oldalban ($AB = BD$) és $A$ rajta fekvő két szögben megegyeznek, ami azt jelenti, hogy $BN = BM$. Tehát az $NBM$ háromszög egy olyan egyenlőszárú háromszög, amelynek a szárai $60^o$-os szöget zárnak be. Tehát a másik két szöge is $60^o$-os. Ezt akartuk bizonyítani. b) Ha a $BNM$ szög $60^o$-os. Az $N$ ponton át húzzunk párhuzamost a $BD$ átlóval. Így az $ANG$ háromszög egy szabályos háromszög lesz. Megmutatjuk, hogy a $GBN$ és az $NDM$ háromszögek egybevágók. Az $NGB\sphericalangle = NDM\sphericalangle = 120^o$.




AGBN$\sphericalangle = 180^o - 120^o + GNB\sphericalangle$, az MND$\sphericalangle = 180^o - (60^o + 60^o + GNB\sphericalangle)$. Tehát a két háromszög szögei egyenlők. Az oldalaik közül a $GB$ és az $ND$ egyenlő, mert $GB = AB - AG$, illetve $ND = AD - AN$, s a felírt egyenlőségekben a jobboldalak egyenlők. Beláttuk, hogy $GBN\triangle \cong NDM\triangle$, amiből az következik, hogy $NB = NM$, s újra találtunk egy olyan egyenlő szárú háromszöget, amelynek a szárai $60^o$-os szöget zárnak be, tehát szabályos.

*Második megoldás.* Megoldás forgatással: forgassuk el az $N$ pontot B körül $+60^o$-kal. Mivel az $AD$ szakasz képe ennél a forgatásnál a $DC$ szakasz, ezért az $N'$ képpont a $DC$ szakaszon van, a $BNN'$ háromszög pedig szükségszerűen szabályos. Ugyanígy az $M$ pontot B körül $-60^o$-kal forgatva a kapott $M'$ pont az $AD$ szakaszon van, és $BMM'$ háromszög szabályos.

Ha $NBM$ szög $60^o$-os, akkor $MBN'$ szögre $0^o$ marad, tehát $M = N'$. Így a $BMN$ háromszög megegyezik $BN'N$ háromszöggel, tehát szabályos. Ha $BMN$ szög $60^o$-os, akkor az $M'MN$ szög-re marad $0^o$, tehát $M' = N$. Így a $BMN$ háromszög megegyezik $BMM'$ háromszöggel, tehát szabályos. Ha pedig $BNM$ szög $60^o$-os, akkor az $N'NM$ szög-re marad $0^o$, tehát $N' = M$. Így a $BMN$ háromszög megegyezik $BN'N$ háromszöggel, tehát szabályos.

## 8. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. Anna kétszer annyi idős, mint amilyen Bea volt akkor, amikor Anna olyan idős volt, mint Bea most. De amikor Bea olyan idős lesz, mint Anna most, életkoruk összege 135 lesz. Milyen idős most Anna, illetve Bea?

Legyen Bea most B éves.

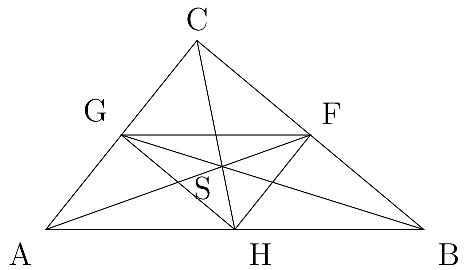
| | Múlt | Jelen | Jövő | Életkor |
|---|---|---|---|---|
| Anna | $b$ | $b+x$ | $b+2x$ | 45 |
| Bea | $b-x$ | $b$ | $b+x$ | 60 |

A táblázat és a szöveg (Anna kétszer annyi idős, mint amilyen Bea volt akkor, amikor Anna olyan idős volt, mint Bea most.) alapján felírhatjuk a következő egyenleteket: $(b+x) = 2\cdot(b-x)$, $b = 3x$ (I.) Továbbá (De amikor Bea olyan idős lesz, mint Anna most, életkoruk összege 135 lesz.) : $(b+x)+(b+2x) = 135$, $2b+3x = 135$ (II.) (I.)-et és (II.)-őt megoldva $9x = 135$, $x = 15$ és $b = 45$. Tehát jelenleg Bea 45 éves, Anna pedig 60, Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a kapott értékek helyességéről.

2. Bizonyítsátok be, hogy bármely háromszög súlyvonalainak összege nagyobb, mint a háromszög kerületének $\frac{3}{4}$ része!

*Első megoldás.* Legyenek az ABC háromszög oldalai hossza $a$, $b$ és $c$. A hozzájuk tartozó súlyvonalak hossza rendre $s_a, s_b, s_c$. Tudjuk, hogy a súlypont a súlyvonalat harmadolja, a nagyobbik rész a csúcs felől van. Felírhatunk 3 háromszög egyenlőtlenséget: $\frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_b > c$ $\frac{2}{3}s_b + \frac{2}{3}s_c > a$ $\frac{2}{3}s_c + \frac{2}{3}s_a > b$. Adjuk össze ezt a 3 egyenlőtlenséget: $\frac{4}{3}(s_a + s_b + s_c) > a + b + c$. Átrendezve kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget $s_a + s_b + s_c > \frac{3}{4}(a + b + c)$.

*Második megoldás.* Ehhez nem kell tudni, hogy a súlypont harmadolja a súlyvonalat:




Írjuk fel a következő háromszög-egyenlőtlenségeket:

$$AS + SB > AB \qquad FS + SG > FG = \frac{AB}{2}$$
$$BS + SC > BC \qquad GS + SH > GH = \frac{BC}{2}$$
$$CS + SA > CA \qquad HS + SF > HF = \frac{CA}{2}$$

Összeadva mindet kapjuk, hogy $2(AS + FS + BS + GS + CS + SH) > \frac{3}{2}(AB + BC + Cm,$ amit 2-vel osztva $AF + BG + CH > \frac{3}{4}(AB + BC + CA)$, ezt kellett bizonyítani.

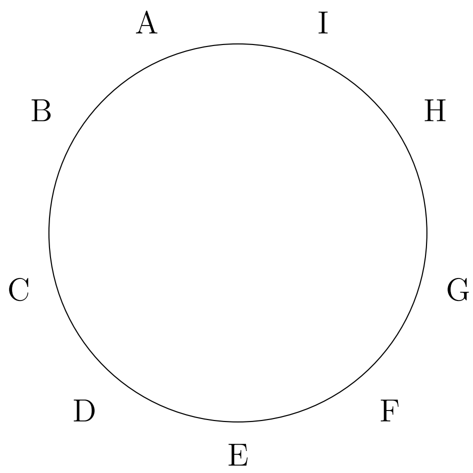
3. Az $\overline{abcdef}$ és $\overline{fdebca}$ hatjegyű számok különbsége osztható 271-gyel. Bizonyítsátok be, hogy $b = d$ és $c = e$ !

Felhasználjuk, hogy a 271 prímszám. Bontsuk fel mindkét hatjegyű számot helyi értékesen! $\overline{abcdef} = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f$, illetve $\overline{fdebca} = 100000f + 10000d + 1000e + 100b + 10c + a$. E kettő különbsége a feladat feltétele miatt osztható 271-gyel: $99999(a - f) + 9900(b - d) + 990(c - e)$. Mivel a 99999 osztható 271-gyel, ezért kell, hogy $9900(b - d) + 990(c - e)$ is osztható legyen 271-gyel. De $9900(b-d)+990(c-e) = 990[10(b-d)+c-e]$, ahol a 990 nem osztható 271-gyel, ezért kell, hogy a szögletes zárójelben lévő legyen osztható. Mivel $b$, $d$, $e$ és $f$ egyaránt számjegyek, ezért a zárójel értéke nem lehet $\pm 271$, csakis 0 lehet, ami azt jelenti, hogy $b = d$ és $c = e$, s ezt akartuk bizonyítani.

4. Egy kör kerületére kilenc egész számot írunk, amelyek összege 90. Bizonyítsuk be, hogy van négy egymás melletti szám, amelyek összege legalább 40.

*Első megoldás.* Legyenek a számok $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $h$, $i$ - ebben a sorrendben. Bizonyítsunk indirekt: tegyük fel, hogy bármely 4 egymás melletti szám összege kisebb, mint 40. Ekkor: $(a + b + c + d) + (b + c + d + e) + (c + d + e + f) + \cdots + (i + a + b + c) < 9 \cdot 40$. Innen: $4 \cdot (a + b + c + d + e + f + g + h + i) < 360$. Felhasználva a feltételt: $4 \cdot 90 < 360$, ami ellentmondás. Tehát kiinduló feltevésünk nem lehet igaz, vagyis van 4 egymás melletti szám, melyek összege legalább 40.

*Második megoldás.*




Tegyük fel, hogy nincs négy egymás melletti szám, amelynek az összege legalább 40, vagyis $A+B+C+D<40$, $A+B+C+D+E+F+G+H+I=90$. Tehát: $E+F+G+H+I>50$, $E+F+G+H<40$, mivel nem lehet négy egymás melletti szám összege legalább 40. Tehát $I>10$, ezt le lehet vezetni az összes számra: $A>10, B>10, C>10, D>10, E>10, F>10, G>10, H>10, I>10$. Ez nem lehet, mert $A+B+C+D+E+F+G+H+I=90$ és ez esetben ez az összeg nagyobb lenne, mint 90. Tehát a feltevés hamis, és a feladat állítása igaz.

5. Mivel egyenlő az $A$ és $B$ átlaga (számtani közepe), ha $A=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}+\cdots+\frac{1}{2013\cdot2014}$ és $B=\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{6\cdot7}+\cdots+\frac{1}{2014\cdot2015}$?

Vegyük észre, hogy mindkét kifejezésben 1007 tag szerepel. Adjuk össze $A$ és $B$ megfelelő sorszámú tagjait! Az első tagok összege: $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=1-\frac{1}{3}$ A második tagok összege: $\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}=(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$ A harmadik tagok összege: $\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}=(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ Az utolsó tagok összege: $\frac{1}{2013\cdot2014}+\frac{1}{2014\cdot2015}=(\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014})+(\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015})=\frac{1}{2013}-\frac{1}{2015}$ Az egyenlőségek jobboldalait leösszegezzük: $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2015}=1-\frac{1}{2015}=\frac{2014}{2015}$

Tehát $A$ és $B$ számtani közepe $\frac{1007}{2015}$.

*Megjegyzés.* Vigyázat, itt nem 1007 vagy 2014 szám számtani közepére kérdez rá a feladat, hanem $A$ és $B$ átlagára.

# XLIV. verseny 2014–2015.

# Feladatok

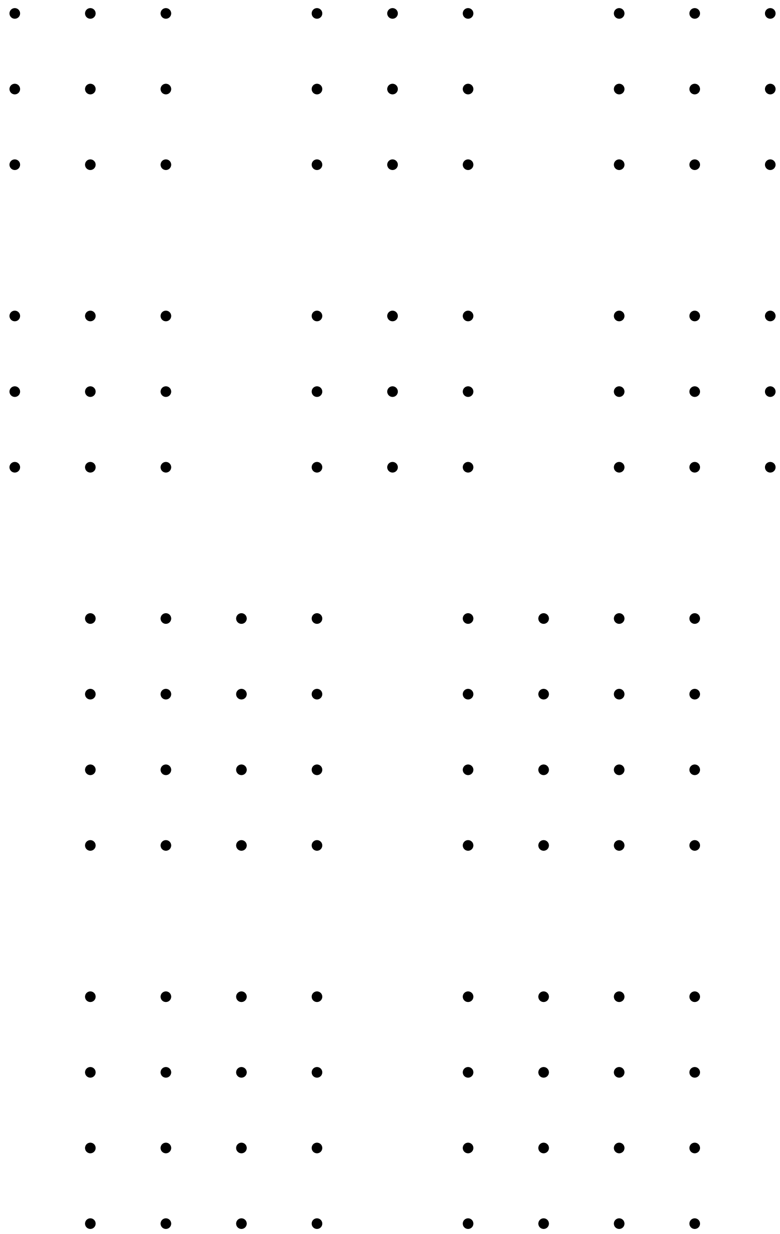
**5. osztály** **Megyei forduló**

1. Melyik a legkisebb páros négyjegyű szám, amelynek minden számjegye különböző, és az első két számjegy összege kétszerese a harmadik és negyedik számjegy összegének? (Indoklást is írj, ne csak a végeredményt!)

2. Egy nagy asztalra piros (P) és kék (K) korongokat pakolunk. Az első sorba 100 darabot helyezünk el PPKKPPKKPP...PPKK sorrendben. Ezt követően az első sor alá két-két korong közé egy-egy újabbat teszünk, mégpedig úgy, hogy két egyforma alá pirosat, két különböző alá kéket rakunk. Majd ugyanezt a szabályt mindig egy-egy sorral lejjebb alkalmazva teszünk korongokat a harmadik, negyedik, ..., végül a 100. sorba. Az utolsó sorba így egyetlen korong kerül.
Összesen hány kék korong van ekkor az asztalon?

3. Az asztalon sorban áll egy üveg, egy korsó, egy csésze, egy pohár és egy bögre. Különböző italokkal vannak töltve, mégpedig: teával, kávéval, tejjel, narancslével, ásványvízzel. Megfogjuk a poharat és áttesszük egy másik helyre úgy, hogy a tea és a tej közé kerüljön. Emiatt a tej és a narancslé szomszédosakká válnak, és a kávé lesz a sor közepén.
Melyik edényben milyen ital lehet?

4. Lili és Lali azt a feladatot kapták, hogy rajzoljanak olyan sokszögeket, melyeknek minden csúcsa a segédlapon található $3\times3$-as rács valamelyik rácspontja. Rajzoltak is, mégpedig két különbözőt. Olyanokat, amelyek nem illeszthetők egymásra sem forgatással, sem tükrözéssel.
   a) Mutass példát két olyan hétszögre, amelyet Lili és Lali rajzolhatott!
   b) Ezután Lili és Lali együtt megkeresték a legnagyobb oldalszámú olyan sokszöget, amelynek minden csúcsa a segédlapon látható $4 \times 4$-es rács valamelyik pontja. Hány oldala van ennek a sokszögnek? A mellékelt segédlapon csak a megoldásokat add meg, ne azon próbálkozz! Ha mégis elrontanád a rajzot, akkor mindkét esetben több rács van, mint amennyire valójában szükség van.



5. Készíts $3 \times 3$-as bűvös négyzetet úgy, hogy a következő számok mindegyikét felhasználod:

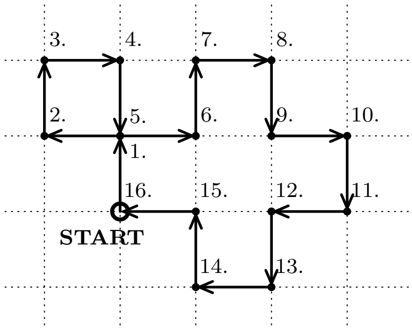
$$23, 29, 35, 43, 49, 55, 63, 69, 75.$$

(Bűvös négyzetben minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban a számok összege ugyanaz a szám.)

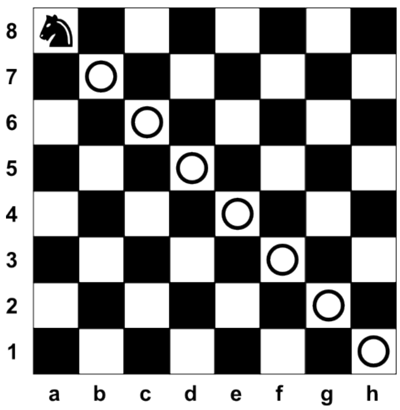
1. Melyik a legkisebb 3-mal osztható négyjegyű szám, amelynek minden számjegye különböző, és az első két számjegy összege háromszorosa a harmadik és negyedik számjegy összegének?

2. Adj meg egy négyszöget és 2 egymásra merőleges egyenest úgy, hogy ha felvágjuk a négyszöget a két egyenes mentén, akkor a lehető legtöbb darabot kapjuk. (Nem kell bizonyítani, hogy ez a maximum.)

3. Egy katica egy négyzetrács rácsvonalain mozog úgy, hogy az egyik rácspontból indul, minden rácspontban elfordul derékszögben és az útja végén visszaérkezik a kiindulási pontba. Lehetséges-e, hogy az út során éppen 222 egységet haladt? (Az ábrán egy 16 egység hosszúságú útvonal látható.)




4. Egy sakktábla a8 mezőjén áll egy huszár, a b7-h1 átló valamennyi mezőjén pedig egy-egy pénzérme található (lásd a bal oldali ábrát). A huszárral a sakkban szokásos módon léphetünk (lásd a jobb oldali ábrát). Ha rálépünk egy érmére, akkor azt felvehetjük.
   a) Bizonyítsd be, hogy nem lehetséges 14-nél kevesebb lépéssel begyűjteni a 7 érmét!
   b) Adj meg egy 14 huszárlépésből álló útvonalat, amelynek során mindegyik érmét megszerzed! (Leírhatod sorban a mezőket az a8-cal kezdve vagy írd be a $8 \times 8$-as négyzet megfelelő mezőjébe, hogy hányadik lépés után tartózkodik ott a huszár.)

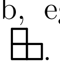



5. Egy nagy asztalra piros (P) és kék (K) korongokat pakolunk. Az első sorba 5 darabot helyezünk el. Ezt követően az első sor alá két-két korong közé egy-egy újabbat teszünk, mégpedig úgy, hogy két egyforma alá pirosat, két különböző alá kéket rakunk. Majd ugyanezt a szabályt mindig egy-egy sorral lejjebb alkalmazva teszünk korongokat a harmadik, negyedik és végül az ötödik sorba (ide már csak egyetlen korong kerül).
   Igaz-e, hogy ha az első sorban van kék korong, akkor összesen legalább 5 kék korong lesz az asztalon?

**7. osztály** **Megyei forduló**

1. Ki lehet-e tölteni a következő táblázat mezőit pozitív egész számokkal úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok szorzata egyenlő legyen?

| | | |
|---|---|---|
| | | 10 |
| 3 | | 14 |
| | 35 | |

2. Van 6 darab, egyforma, L-alakú műanyag lapunk, amelyek 3 egységnégyzetből vannak összeállítva: .
Mind a 6 műanyag lap felhasználásával építünk egybefüggő síkbeli alakzatokat úgy, hogy csak teljes négyzetoldal mentén szabad illeszteni a lapokat egymáshoz, és nem lehet a lapokat egymásra helyezni.
Lehet-e a kapott alakzat kerülete:
   a) 18?
   b) 25?
   c) 28?
   d) 38?
   e) 40?

   Ha igen, akkor mutass példát a megfelelő kerületű alakzatra! Ha nem, akkor bizonyítsd be, hogy nem lehet!

3. 8 pozitív egész szám szorzata 500-ra végződik. Hány páros szám lehet a 8 között? Minden általad lehetségesnek gondolt darabszámra mutass példát! Bizonyítsd, hogy más lehetőség nincs!

4. $ABCDEF$ egy konvex hatszög a síkban. Tudjuk, hogy az $ABDE$ és a $BCEF$ négyszögek paralelogrammák. Bizonyítsd be, hogy a $CDFA$ négyszög is paralelogramma.

5. Egy nagy asztalra piros (P) és kék (K) korongokat pakolunk. Az első sorba 100 darabot helyezünk el. Ezt követően az első sor alá két-két korong közé egy-egy újabbat teszünk, mégpedig úgy, hogy két egyforma alá pirosat, két különböző alá kéket rakunk. Majd ugyanezt a szabályt mindig egy-egy sorral lejjebb alkalmazva teszünk korongokat a harmadik, negyedik, ..., végül a századik sorba (ide már csak egyetlen korong kerül).
Igaz-e, hogy ha az első sorban van kék korong, akkor összesen legalább 100 kék korong lesz az asztalon?

8. osztály

Megyei forduló

1. Egy $10 \times 10$-es négyzetrács minden kis négyzete fehérre vagy feketére van színezve. Egy lépésben egy sor vagy oszlop minden kis négyzetének színét megváltoztathatjuk az ellenkezőjére. Bizonyítsd be, hogy a kiinduló állástól függetlenül elérhető ilyen lépésekkel az, hogy legalább 10-zel több négyzet legyen fekete, mint fehér.

2. Jenő idén februárban a városban sétálgatott, amikor egy figyelemre méltó épületen meglátott egy ismertető táblát. A táblán sok érdekesség volt olvasható az épületről, többek között az is, hogy mikor építették. Kicsit elgondolkozott, majd megállapította, hogy 2015-öt követően lesz egy olyan év, amikor az aktuális évszám éppen a négyzete annak a számnak, ahány éves az épület abban az évben. 2015-ben az épület építésének hányadik évfordulóját ünneplik?

3. Rá lehet-e írni egy kocka nyolc csúcsára a $0, 1, 2, \ldots, 12$ számok közül nyolcat úgy, hogy minden él két végpontjában a számok összege osztható legyen hárommal? (Minden számot legfeljebb egyszer használhatunk fel.)

4. Egy téglalap alakú papírlap két oldala 1 és $\sqrt{2}$ egység. A papírlap egyik sarkát behajtjuk (egyenes hajtásséllel) úgy, hogy a hajtásél az egyik csúcsból indul, és a csúcsot nem tartalmazó rövidebbik oldalt metszi, valamint a behajtott csúcs éppen a hosszabb oldalra esik. Milyen messze van a hajtásél (csúcstól különböző) végpontja a legközelebbi csúcstól?

5. Egy $a_n$ sorozat tagjairól tudjuk, hogy minden pozitív egész $n$ esetén

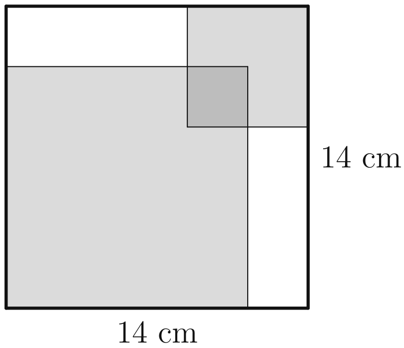
$$a_{2n} = a_n \text{ és } a_{2n+1} = a_n + a_1,$$

továbbá $a_{1000} = 6$. Mennyi $a_{2015}$ értéke?

5. osztály, 1. nap — Országos döntő

1. Egy háromjegyű szám középső számjegyét elhagyva egy kétjegyű számot kaptunk. A két szám összege 816. Mi lehet ez a két szám?

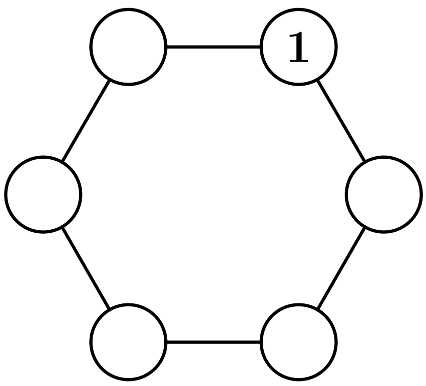
2. Egy 14 cm oldalú négyzet két átellenes sarkába beillesztettünk egy-egy kisebb négyzetet úgy, hogy két szomszédos oldaluk illeszkedik a nagy négyzet oldalaira.




A kis négyzetek közül a nagyobb területe a kisebb területének 4-szerese. A két kis négyzetnek keletkezett közös része, ennek területe 1 $cm^2$. Mekkora a nagy négyzetnek a kicsik által le nem fedett területe?

3. Belenéztünk a tanárok tolltartóiba, és a következőt figyeltük meg: mindegyikben tollak és ceruzák voltak, tollból is, és ceruzából is legalább egy. Minden darab fekete vagy piros színű, és minden tolltartóban van mindkét színből. Igaz-e, hogy mindegyik tolltartóban van két olyan íróeszköz, amelyik színben is, fajtában is különbözik?

4. Egy hatszög csúcsaiba az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat írjuk, mindet pontosan egy csúcsba. Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy minden csúcsba írt számra igaz, hogy vagy mindkét szomszédja nagyobb nála, vagy mindkettő kisebb?




5. Adott 5 pozitív egész szám, amelyeknek felhasználásával az összes lehetséges 3-tagú összeget elkészítettük. Így ezeket a számokat kaptuk:

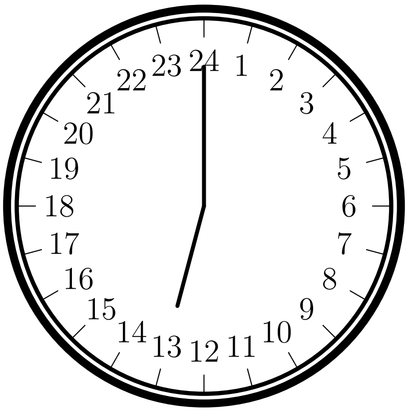
$$10, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 24, 25.$$

Mi lehetett az eredeti 5 szám?

5. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Anna és András hosszú ideje arról álmodozik, hogy kapnak egy-egy 24 órás beosztású mutatós órát.




Tibi bácsi, az ismerős órásmester meglepi őket egy-egy ilyen órával. Anna órája kétszer olyan gyorsan jár, mint ahogy kellene, de szerencsére a megfelelő irányban. A másik tökéletes tempóban jár, viszont visszafelé. 13:00-kor mindkét óra a pontos időt mutatja. Mikor mutatják legközelebb ugyanazt az időt?

2. Négy ötödikes diák a matekszakkörön a következő feladvánnyal lepte meg a többieket: tegnap megmértük mind a négyünk súlyát. Minden mérés után kiszámítottuk az addigi mérések átlagát, és azt tapasztaltuk, hogy minden mérés után az átlag 1-gyel nőtt. Mennyivel nehezebb közülünk a legnehezebb a legkönnyebbnél? (Egy szám átlaga saját maga, két szám átlaga a két szám összegének fele, három szám átlaga a három szám összegének harmada, négy szám átlaga pedig a négy szám összegének negyede.)

3. Peti egy $4 \times 4$-es táblázatot kitöltött számokkal. Elárulta, hogy egy szám jobb oldali szomszédja mindig ugyanannyival nagyobb az eredetinél, de nem mondta meg, hogy mennyivel. Azt is elmondta, hogy egy szám alsó szomszédja mindig ugyanannyival nagyobb az eredetinél, de itt sem árulta el, hogy mennyivel. Az 1. sor 1. mezőjébe (bal felső sarok) 7, a 3. sor 4. mezőjébe 33, a 4. sor 2. mezőjébe 32 került. Milyen számokat írt Peti a táblázat többi mezőjébe?

4. Egy vonalzóról lekopott a jelek egy része, mindössze öt darab, egész centimétert jelölő beosztás maradt meg: ezek növekvő sorrendben 0, $a$, $b$, $c$ és $d$ centimétert jelölnek. Ennek ellenére a vonalzóval 1-től $d$-ig bármilyen egész centiméteres távolságot *közvetlenül* le tudunk mérni. (Egy távolságot akkor tudunk *közvetlenül* lemérni, ha van a vonalzónak két beosztása, amelyek távolsága éppen ekkora.) Tudjuk, hogy az utolsó beosztásnak, $d$-nek az értéke 6-nál nagyobb. Készíts ilyen vonalzókat minél több különböző $d$ értékkel! (Nem kell indokolni, hogy az általad megadottnál többféle $d$ érték nem lehetséges. Azt viszont indokolni kell, hogy az általad megadott vonalzó megfelel a feltételeknek.)

6. osztály, 1. nap — Országos döntő

1. Belenéztünk a tanárok tolltartóiba, és a következőt figyeltük meg: mindegyikben tollak voltak és ceruzák, tollból is, és ceruzából is legalább egy. Minden darab fekete vagy piros színű, és minden tolltartóban van mindkét színből. Igaz-e, hogy mindegyik tolltartóban van két olyan íróeszköz, amelyik színben is, fajtában is különbözik?

2. Egy taxis cég könnyen megjegyezhető telefonszámot szeretne, ezért úgy döntenek, hogy legfeljebb kétféle számjegyet fognak használni. Az kötelező érvényű, hogy egy taxitársaság telefonszáma csak 3-assal kezdődhet, és csakis 6-jegyű lehet. Hány különböző lehetőségből választhatnak?

3. Az
$$1! + 2! + 3! + ... + 49!$$
számnak mi a tízes számrendszerbeli utolsó két számjegye? (Ahol $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.)

4. Egy táblán mindig egyetlen szám látható, kezdetben ez a szám az 1. Egy lépésben a táblán lévő számot növelhetjük 1-gyel, vagy a reciprokát vehetjük. Mutasd meg, hogy elérhető a fenti lépések alkalmazásával, hogy a táblán a 7/2015 legyen látható.

5. 124 fekete és 1 piros kis kockából hány különböző $5 \times 5 \times 5$-ös kocka építhető, ha csak a nagy kocka felszíne alapján tudjuk megkülönböztetni a kockákat, és a forgatással egymásba vihetőket nem tekintjük különbözőnek?

6. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Felírtuk a táblára az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}$ számokat, majd közéjük a „+” és „-” műveleti jeleket tettük kedvünk szerint.
   Lehet-e az eredmény 0?

2. Egy $n$ oldalú sokszögről tudjuk, hogy bármely két szomszédos oldala merőleges egymásra, és oldalainak hossza $1, 2, \ldots, n$ egység (nem feltétlenül ebben a sorrendben). Mennyi az $n$ lehetséges legkisebb értéke?

3. Egy számmisztikával foglalkozó klub tagjai az $1, 2, 3, \ldots, 11$ számok közül némelyik számot szerencsésnek, a többit szerencsétlennek nevezik. A következőket árulták el a számaikról:
   - Ha egy szám szerencsés, akkor az őt összegben 12-re kiegészítő szám is szerencsés.
   - Ha egy szám szerencsés, akkor az osztói is szerencsés számok.
   - Van páros szerencsés szám.
   - A szerencsétlen számok száma is szerencsétlen szám.

   Határozd meg, hogy melyek a szerencsés számok!

4. Egy vonalzóról lekopott a beosztások jelentős része, csak a $0, a, b, c, d$ centimétert jelző vonalak láthatóak, ahol $0 < a < b < c < d$ egész számok. Mekkora az a legnagyobb $d$ érték, amelyre a vonalzóval 1-től $d$-ig minden egész centiméteres távolságot *közvetlenül* le tudunk mérni? Bizonyítsd az állításod! (Egy távolságot akkor tudunk *közvetlenül* lemérni, ha van a vonalzónak két beosztása, amelyek távolsága éppen ekkora.)

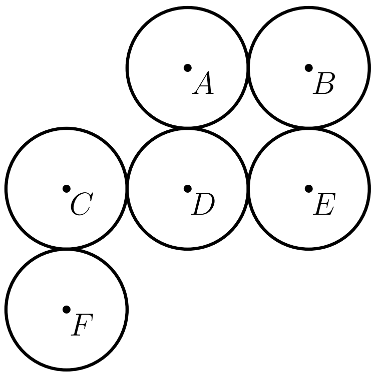
**7. osztály, 1. nap** **Országos döntő**

1. Az
$$1! + 2! + 3! + ... + 49!$$
számnak mi a tízes számrendszerbeli utolsó két számjegye? (Ahol $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.)

2. Pisti a síkot 100 különböző egyenessel felosztotta tartományokra, majd beszínezte az ábráján a sokszögeket. Hány olyan tartomány jöhetett létre, amelyet Pisti nem színezett be? Mutass példát minden lehetőségre, és bizonyítsd, hogy más nem lehet a nem színezett tartományok száma.

3. Egy táblán mindig egyetlen szám látható, kezdetben ez a szám az 1. Egy lépésben a táblán lévő számot növelhetjük 1-gyel, vagy a reciprokát vehetjük. Mutasd meg, hogy elérhető a fenti lépések alkalmazásával, hogy a táblán a 17/2015 legyen látható.

4. Adott 6 egységsugarú körlap, melyek az alábbi ábra szerint érintik egymást.



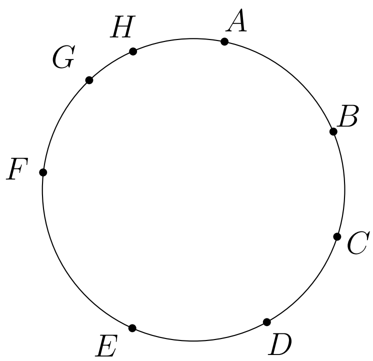

Szerkesztendő két különböző egyenes, amelyek mindegyike felezi a 6 körlapból álló alakzat területét. Írd le a szerkesztés menetét. A szerkesztést nem kell végrehajtani, de indokolni kell, hogy a kapott egyenesek miért felezik az alakzat területét.

5. Két rabló a következő módon osztozkodik a zsákmányolt aranytallérokon: ,,1 neked, 2 nekem, 3 neked, 4 nekem stb.", amíg az aranytallérokból futja. A végén a soron következő rabló megkapja a maradék aranytallérokat. Tudjuk, hogy 1000 aranytallérnál kevesebb volt a zsákmányuk, és azt is, hogy az osztozkodás végén mindkét rabló egyforma számú aranytallért kapott. Legfeljebb hány aranytallér lehetett a zsákmány?

7. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Adott egy kör kerületén 8 pont, $A, B, C, D, E, F, G, H$.




Hány olyan konvex sokszög létezik, amelynek az $AD$ szakasz átlója, csúcsai pedig a nyolc pont közül kerülnek ki?

2. Egy számmisztikával foglalkozó klub tagjai az $1, 2, 3, \ldots, 11$ számok közül némelyik számot szerencsésnek, a többit szerencsétlennek nevezik. A következőket árulták el a számaikról:
   - Ha egy szám szerencsés, akkor az őt összegben 12-re kiegészítő szám is szerencsés.
   - Ha egy szám szerencsés, akkor az osztói is szerencsés számok.
   - Van páros szerencsés szám.
   - A szerencsétlen számok száma is szerencsétlen szám.

   Határozd meg, hogy melyek a szerencsés számok!

3. Hány négyzetszám van az $1476, 14076, 140076, 1400076, 14000076, \ldots$ végtelen számsorozatban?

4. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 7$ és $BC = 4$. Az $A$ középpontú $AB$ sugarú kör a $CD$ oldalt $E$-ben metszi. A téglalap belsejében lévő $BE$ körív felezőpontja $F$. Az $F$ pontból $AB$-re, illetve $AD$-re állított merőlegesek talppontjai $G$ és $H$. Mekkora az $AGFH$ téglalap területe?

**8. osztály, 1. nap** **Országos döntő**

1. A sakktáblán pirosra van színezve 3 mező. Szeretnénk elérni, hogy bármely piros mezőről bármely másik piros mezőre el lehessen jutni úgy, hogy csak piros mezőket érintünk, és mindig oldallal szomszédos mezőre lépünk tovább. Mutassuk meg, hogy ehhez legfeljebb 12 további mezőt kell pirosra színezni!

2. Mennyi lehet $p+q$ és $p^2+q^2$ legnagyobb közös osztója, ahol $p$ és $q$ két különböző pozitív prímszám?

3. Igaz-e, hogy 20 egymást követő egész számból mindig kiválasztható 10 úgy, hogy a kiválasztott számok összege relatív prím legyen a nem kiválasztott számok összegéhez?

4. Két rabló a következő módon osztozkodik a zsákmányolt aranytallérokon: ,,1 neked, 2 nekem, 3 neked, 4 nekem stb.”, amíg az aranytallérokból futja. A végén a soron következő rabló megkapja a maradék aranytallérokat. Tudjuk, hogy 1000 aranytallérnál kevesebb volt a zsákmányuk, és azt is, hogy az osztozkodás végén mindkét rabló egyforma számú aranytallért kapott. Legfeljebb hány aranytallér lehetett a zsákmány?

5. Egy hegyesszögű háromszög oldalfelező pontjaiból merőlegeseket állítottunk a másik két oldalra. A 6 merőleges által közrezárt hatszög területe hányadrésze a háromszög területének?

8. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Az $ABC$ háromszögben a $B$ csúcsból induló szögfelező az $AC$ oldalt az $E$ pontban metszi. Tudjuk, hogy a $BEA$ szög nagysága 45°. Vegyük fel a $BC$ oldalon az $F$ pontot úgy, hogy $BF = BA$ legyen. Mekkora az $EFA$ szög nagysága?

2. Egy $8 \times 8$-as sakktáblán a következő játékot játssza két játékos: az első játékos elhelyezi a királyt a tábla egyik mezőjén, majd felváltva lépnek a királlyal (az első lépést a királlyal a második játékos teszi). Olyan mezőre szabad csak lépnie a soron következő játékosnak, ahol a király még nem járt. Az a játékos veszít, aki már nem tud lépni. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája? Adj meg egy nyerő stratégiát! (A királlyal egy lépés során egy él- vagy egy csúcsszomszédos mezőre szabad lépni.)

3. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 7$ és $BC = 4$. Az $A$ középpontú $AB$ sugarú kör a $CD$ oldalt $E$-ben metszi. A téglalap belsejében lévő $BE$ körív felezőpontja $F$. Az $F$ pontból $AB$-re, illetve $AD$-re állított merőlegesek talppontjai $G$ és $H$. Mekkora az $AGFH$ téglalap területe?

4. Egy teremben 20 ember van, akik között eddig nem történt kézfogás. A terembe 5 percenként belép egy új ember, és kezet fog pontosan két jelenlévővel. Azonban bármelyik résztvevő a harmadik kézfogása után rögtön elhagyja a termet és többé nem tér vissza. Bizonyítsd be, hogy egy idő után valaki egyedül marad a teremben!

# Megoldások

5. osztály

Megyei forduló

1. Melyik a legkisebb páros négyjegyű szám, amelynek minden számjegye különböző, és az első két számjegy összege kétszerese a harmadik és negyedik számjegy összegének? (Indoklást is írj, ne csak a végeredményt!)

Az első két számjegy összege páros, mert a második kettő összegének duplája. Az összeg 0 nem lehet, mert így az első számjegynek is 0-nak kellene lenni. Az összeg tehát legalább 2. A legkisebb számot keressük, ezért álljon az ezresek helyén 1. Ha a második számjegy 1-es lenne, akkor 1+1=2, de így egyforma számjegyeket használnánk, ez nem megengedett. 1+3=4 növekvő sorrendben a következő lehetőség az első két számjegyre. Számunk tehát így nézhet ki: 13_ _. A második két jegy összege most szükségképpen 4:2=2, ami lehet 1+1, vagy 0+2. Csak a második esetben különbözőek a számjegyek, tehát a számunk lehet 1302, vagy 1320, melyek közül az 1302 a kisebb. A keresett szám az **1302**.

2. Egy nagy asztalra piros (P) és kék (K) korongokat pakolunk. Az első sorba 100 darabot helyezünk el PPKKPPKKPP...PPKK sorrendben. Ezt követően az első sor alá két-két korong közé egy-egy újabbat teszünk, mégpedig úgy, hogy két egyforma alá pirosat, két különböző alá kéket rakunk. Majd ugyanezt a szabályt mindig egy-egy sorral lejjebb alkalmazva teszünk korongokat a harmadik, negyedik, ..., végül a 100. sorba. Az utolsó sorba így egyetlen korong kerül.
Összesen hány kék korong van ekkor az asztalon?

Az első sorban lévő korongok fele kék, ez 50 darab. A második sorban váltakoznak a színek: PKPKPK...PKP. Összesen 99 darab korong van a második sorban. A két szélén pirosak állnak, ezért a második sorban a kékek száma 49. A harmadik sorban az összes kék, ez 98 darab. A negyedik sor végig piros, és a szabály miatt alatta is minden korong piros.
Összesen tehát $50 + 49 + 98 =$**197** darab kék korong van az asztalon.

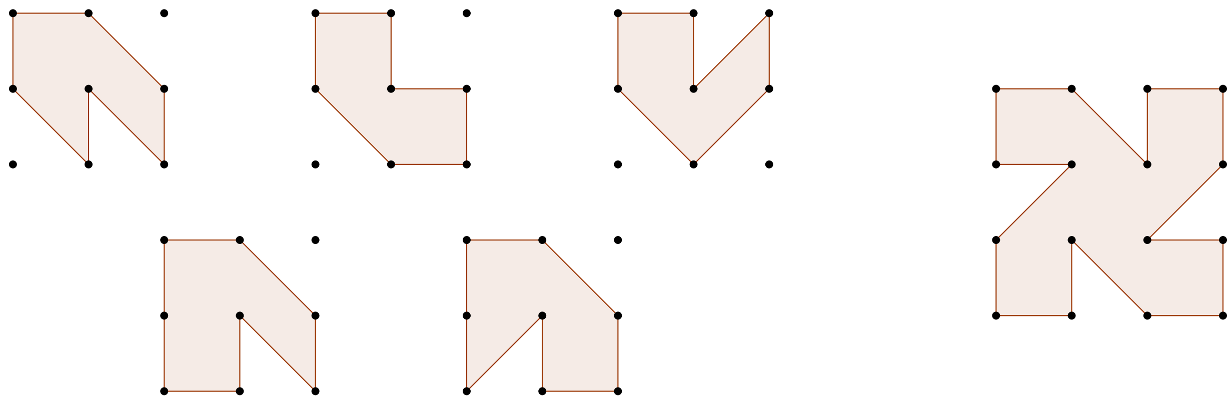
3. Az asztalon sorban állnak a következő edények: egy üveg, aztán egy korsó, utána egy csésze, majd egy pohár és végül egy bögre.
Különböző italokkal vannak töltve, mégpedig: teával, kávéval, tejjel, narancslével, ásványvízzel. (Nem feltétlenül ebben a sorrendben.) Megfogjuk a poharat és áttesszük egy másik helyre úgy, hogy közvetlenül mellette a tea és a tej álljon. Emiatt a tej és a narancslé szomszédosakká válnak, és a kávé lesz a sor közepén.
Melyik edényben milyen ital lehet?

A kezdeti sorrend: üveg, korsó, csésze, pohár, bögre. A poharat csak az üveg és a korsó, vagy a korsó és a csésze közé tehetjük, mert áttesszük egy másik helyre, mégpedig nem a sor szélére, hiszen a tejet és a teát tartalmazó edény is szomszédja lesz. Így most két lehetőség van az edények sorrendjére: üveg, pohár, korsó, csésze, bögre vagy üveg, korsó, pohár, csésze, bögre. Az első sorrend nem lehetséges, mert középen a kávé lenne korsóban, így viszont a pohár egyik szomszédja a kávé lenne, pedig a tej és a tea közé kellett volna kerülnie. Tehát a második a helyes sorrend, és a kávé a pohárban van. A tej és a tea a korsó és a csésze valamelyikében van, a tej mellé került a narancs. Mivel az üveg és a korsó eddig is szomszédosak voltak, ha ezekben lenne a tej és a narancslé, akkor most nem válnának szomszédossá, így azok csak a második sorrendben a pohár másik oldalán, a csészében és a bögrében lehetnek. Tehát az üvegben víz, a korsóban tea, a pohárban kávé, a csészében tej és a bögrében narancs van.

4. Lili és Lali azt a feladatot kapták, hogy rajzoljanak olyan sokszögeket, melyeknek minden csúcsa a segédlapon található $3 \times 3$-as rács valamelyik rácspontja. Rajzoltak is, mégpedig két különbözőt. Olyanokat, amelyek nem illeszthetők egymásra sem forgatással, sem tükrözéssel.

   a) Mutass példát két olyan hétszögre, amelyet Lili és Lali rajzolhatott!

   b) Ezután Lili és Lali együtt megkeresték a legnagyobb oldalszámú olyan sokszöget, amelynek minden csúcsa a segédlapon látható $4 \times 4$-es rács valamelyik pontja. Hány oldala van ennek a sokszögnek? A mellékelt segédlapon csak a megoldásokat add meg, ne azon próbálkozz! Ha mégis elrontanád a rajzot, akkor mindkét esetben több rács van, mint amennyire valójában szükség van.



A fenti ábra bal oldali részén ötféle, az (a) feladatnak megfelelő hétszög látható. (Elég két különbözőt megrajzolni.) Az ábra jobb oldalán a (b) feladat feltételeinek megfelelő 16-szög látható. 16 oldalnál több nem lehet a $4 \times 4$-es rácson, mert egy sokszögnek annyi csúcsa van, ahány oldala, és csak 16 pontot használhatunk fel csúcsként.

5. Készíts $3 \times 3$-as bűvös négyzetet úgy, hogy a következő számok mindegyikét felhasználod:

$$23, 29, 35, 43, 49, 55, 63, 69, 75.$$

(Bűvös négyzetben minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban a számok összege ugyanaz a szám.)

| | | |
|---|---|---|
| 29 | 75 | 43 |
| 63 | 49 | 35 |
| 55 | 23 | 69 |

6. osztály — Megyei forduló

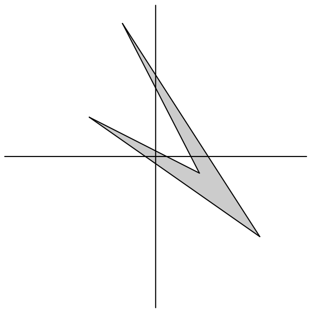
1. Melyik a legkisebb 3-mal osztható négyjegyű szám, amelynek minden számjegye különböző, és az első két számjegy összege háromszorosa a harmadik és negyedik számjegy összegének?

Keressük a számot $\overline{abcd}$ alakban ($a$,$b$,$c$,$d$ páronként különböző számjegyek). Mivel $\overline{abcd}$ osztható 3-mal, így a számjegyeinek összege is osztható 3-mal. A feltétel értelmében az első két számjegy összege egyenlő a harmadik és a negyedik számjegy összegének háromszorosával ($a + b = 3(c + d)$).
Ez azt jelenti, hogy a számjegyek összege a harmadik és a negyedik számjegy összegének négy-szerese ($a + b + c + d = 4(c + d)$). Ez csak úgy lehet 3-mal osztható, ha a harmadik és a negyedik számjegy összege osztható 3-mal. Ekkor az első két jegy összege, amely a harmadik és a negyedik jegy összegének háromszorosa, oszthatónak kell lennie 9-cel, azaz az összegük legalább 9 (hiszen 0 nem lehet). Mivel ez egy valódi négyjegyű szám, ezért az első jegy legalább 1 ($a \geq 1$). A legkisebb ilyen számra törekszünk, ezért $a = 1$, és így $b = 8$. Mivel $a + b = 9$, így $c + d = 3$. Ismét a minimumra törekvés miatt: $c = 0, d = 3$. A megoldás tehát: **1803**.

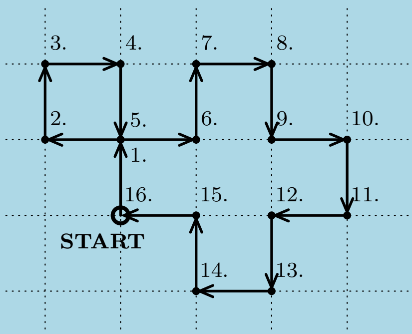
*Megjegyzés.* A 9-cel való oszthatóságra nincs szükség. Vegyük észre, hogy az utolsó két számjegy összege nem lehet nulla, mert akkor az első két számjegy összege is nulla lenne, és így nem kapnánk valódi négyjegyű számot. Mivel az utolsó két számjegy összege oszható hárommal, így legalább 3 az összegük. Ekkor viszont az első két számjegy összege legalább 9.

2. Adj meg egy négyszöget és 2 egymásra merőleges egyenest úgy, hogy ha felvágjuk a négyszöget a két egyenes mentén, akkor a lehető legtöbb darabot kapjuk! (Nem kell bizonyítani, hogy ez a maximum.)

Legfeljebb 6 részre lehet osztani a négyszöget. Az alábbi ábra egy lehetséges megoldást mutat. (Nem kell bizonyítani, hogy ennél több rész nem lehetséges.)



3. Egy katica egy négyzetrács rácsvonalain mozog úgy, hogy az egyik rácspontból indul, minden rácspontban elfordul derékszögben és az útja végén visszaérkezik a kiindulási pontba. Lehetséges-e, hogy az út során éppen 222 egységet haladt? (Az ábrán egy 16 egység hosszúságú útvonal látható.)




*Első megoldás.* A katica egy-egy lépése 4 irányban történhet: vízszintesen balra vagy jobbra, illetve függőlegesen fel vagy le.

A katica útja végén visszatér a kiindulópontba, ezért összesen ugyanannyi lépést tesz balra, mint amennyit jobbra. Így a vízszintes lépések száma páros szám. Hasonlóan látható a függőleges lépésekről is, hogy ezek száma szintén páros. Mivel a katica minden rácspontban elfordul derékszögben, ezért felváltva tesz egy-egy lépést vízszintesen és függőlegesen. Mindkét típusból páros számú lépést tesz, ezért ugyanannyit lép vízszintes és függőleges irányban. Azaz a teljes lépésszám fele csak páros szám lehet. (A teljes lépésszám 4-gyel osztható.) Mivel a 222 fele nem páratlan (a 222 nem osztható 4-gyel), így a kívánt útvonal **nem létezik**.

*Második megoldás.* Tegyük fel, hogy a katica az origóból indul és minden lépése 1 egység hosszúságú. Ekkor minden lépés után egy egész koordinátájú pontban fog tartózkodni.

Mivel egy lépésben egy rácsvonal mentén halad 1 egységet, ezért pontosan az egyik koordináta változik meg, mégpedig éppen 1-gyel. Nőhet is, csökkenhet is. Vagyis minden lépésben pontosan az egyik koordináta paritása változik meg. Tegyük fel, hogy visszatér a kiindulás helyére, vagyis az origóba. Ez azt jelenti, hogy mindkét koordinátája páros sokszor kellett, hogy megváltozzon. Mivel minden lépés után derékszögben fordul el, ezért a koordináták szigorúan felváltva változnak. Kiinduláskor mindkét koordináta páros (0). Az első lépés után az egyik páratlan a másik páros. A második után mindkettő páratlan. A harmadik után az egyik páros a másik páratlan. A negyedik után pedig ismét mindkettő páros. Ez ismétlődik ezt követően is, vagyis nyilvánvalóan minden negyedik lépésben lesz mindkét koordináta páros. Ebből következik, hogy ha visszatér a kiindulási helyre, akkor az időközben megtett lépések száma 4-gyel osztható. Mivel 222 nem osztható 4-gyel, így a kívánt útvonal **nem létezik**.

4. Egy sakktábla a8 mezőjén áll egy huszár, a b7-h1 átló valamennyi mezőjén pedig egy-egy pénzérme található (lásd a bal oldali ábrát). A huszárral a sakkban szokásos módon léphetünk (lásd a jobb oldali ábrát). Ha rálépünk egy érmére, akkor azt felvehetjük.

   a) Bizonyítsd be, hogy nem lehetséges 14-nél kevesebb lépéssel begyűjteni a 7 érmét!

   b) Adj meg egy 14 huszárlépésből álló útvonalat, amelynek során mindegyik érmét megszerzed! (Leírhatod sorban a mezőket az a8-cal kezdve vagy írd be a $8 \times 8$-as négyzet megfelelő mezőjébe, hogy hányadik lépés után tartózkodik ott a huszár.)

**(a)** A huszár fehér mezőről indul és minden lépésben megváltozik a mező színe, amin áll. Vagyis páros lépés után tartózkodik ismét fehér mezőn. Mind a 7 érme fehér mezőn van és egy mezőn csak egy érme, ezért legalább 7-szer fehérre kell lépnie, hogy összegyűjthesse az összes érmét. Összesen tehát legalább 14 lépésre van szükség az érmék összegyűjtéséhez.
**(b)** Létezik ilyen lépéssorzat:

| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | 13. | 14. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (a8-) | **c7-** vagy **b6-** | **d5-** | **f4-** vagy **e3-** | **g2-** | **h4-** vagy **e1-** | **f3-** | **e5-** vagy **d4-** | **c6-** | **d8-** vagy **a5-** | **b7-** | **d6-** vagy **c5-** | **e4-** | **g3-** vagy **f2-** | **h1** |

*Megjegyzés.* A feladat (a) részében elég arra hivatkozni, hogy az átló egyik mezőjéről sem lehet közvetlenül egy másikra lépni a huszárral.
A (b) részben elég egyetlen helyes lépéssorozatot megadni.

5. Egy nagy asztalra piros (P) és kék (K) korongokat pakolunk. Az első sorba 5 darabot helyezünk el. Ezt követően az első sor alá két-két korong közé egy-egy újabbat teszünk, mégpedig úgy, hogy két egyforma alá pirosat, két különböző alá kéket rakunk. Majd ugyanezt a szabályt mindig egy-egy sorral lejjebb alkalmazva teszünk korongokat a harmadik, negyedik és végül az ötödik sorba (ide már csak egyetlen korong kerül).
Igaz-e, hogy ha az első sorban van kék korong, akkor összesen legalább 5 kék korong lesz az asztalon?

*Első megoldás.* Vizsgáljuk meg a lehetséges eseteket alulról felfelé.
Tegyük fel, hogy az utolsó sorba kék korong kerül. Ez a szabály miatt azt jelenti, hogy a negyedik sorban is van kék korong (mégpedig pontosan 1 kék és 1 piros), ami miatt a harmadik sorban is van kék korong, és ez igaz marad minden kisebb sorszámú sorra is. Mivel 5 sor van, így van legalább 5 kék korong ebben az esetben. Nézzük ezek után azt az esetet, amikor az ötödik sorba piros korong kerül. Ekkor a negyedik sor vagy két kék korongot

tartalmaz, vagy két pirosat. Ha két kék van benne, akkor az első eset gondolatmenetét követve kapjuk, hogy van legalább 5 kék korong az asztalon. Ha két piros áll a negyedik sorban, akkor a harmadikban vagy három kék, vagy három piros korong van. Ha három kék, akkor hasonlóan az előzőekhez kapjuk, hogy van legalább 5 kék korong az asztalon. Ha három piros, akkor a felette lévő sorban lehet négy kék vagy négy piros. Az első sorban is van kék, így ha az első esetben van legalább 5 kék korong. Ha pedig a második sorban minden korong piros, akkor az első sorban is minden korong ugyanolyan színű. Nem lehet azonban mindegyik piros, hiszen van közöttük kék. Tehát ekkor mind kék, így ekkor is van 5 kék korong az asztalon. A válasz tehát az, hogy **igen, igaz**.

*Második megoldás.* Ha egy sorban van kék korong, akkor az összes felette levőben is van. Ez azért igaz, mert kék korongot akkor helyezünk le, ha felette egy kék és egy piros volt szomszédos. Ha az utolsó sor egyetlen korongja kék, akkor a fentiek miatt mind az 5 sorban van legalább egy-egy. Így van összesen legalább 5 kék korong. Ha a legalsó sorban piros korong van, akkor vegyük az a sort, amelyik a kék korongokat tartalmazó sorok közül a legalacsonyabban van. Mivel alatta csupa piros korong van, így ebben a sorban minden korong egyforma színű, tehát mindegyik kék. Legyen ebben a sorban $k$ darab kék korong. Mivel minden sorban eggyel kevesebb korong van, mint az előzőben, így efelett még $5-k$ darab sor van. Ezek mindegyikében van legalább egy-egy kék korong az első megállapításunk szerint, ez legalább $5-k$ darab. Így összesen legalább $k+(5-k)=5$ darab kék korong, tehát az állítás **igaz**.

## 7. osztály — Megyei forduló

1. Ki lehet-e tölteni a következő táblázat mezőit pozitív egész számokkal úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok szorzata egyenlő legyen?

| | | |
|---|---|---|
| | | 10 |
| 3 | | 14 |
| | 35 | |

*Első megoldás.* Tegyük fel, hogy létezik helyes kitöltés. Legyen a középső oszlop első eleme $x$, a második $y$.

| | | |
|---|---|---|
| | $x$ | 10 |
| 3 | $y$ | 14 |
| | 35 | |

Mivel a középső sor és a középső oszlop szorzata megegyezik, így $3\cdot y\cdot 14 = x\cdot y\cdot 35$. Mivel $y>0$, ezért ebből $3\cdot 14 = x\cdot 35$ következik. Mivel $x$ egész, a jobb oldal osztható 5-tel, a bal oldal viszont nem, ez ellentmondás. Tehát **nem lehet** a táblázatot megfelelően kitölteni.

*Második megoldás.* A szorzatok egyenlőségéből következik, hogy a szorzatok prímfelbontásában az 5 kitevője megegyezik. Legyen a középső sor középső mezőjében lévő szám prímfelbontásában az 5 kitevője $n$. A középső sor szélső számai nem oszthatók 5-tel, így ennek a sornak a szorzatában az 5 kitevője $n$. A középső oszlopban a 35 osztható 5-tel, így ennek az oszlopnak a szorzatában az 5 kitevője legalább $n+1$. Tehát a középső sor és a középső oszlop szorzatában az 5 kitevője különböző, így a szorzatok nem lehetnek egyenlők. Tehát **nem lehetséges** a táblázatot megfelelően kitölteni.

*Harmadik megoldás.* Mivel a számok között szerepel 5-tel osztható, bármely sor vagy oszlop szorzatának oszthatónak kell lennie 5-tel. Mivel a középső sor megadott számai 5-tel nem oszthatók, ezért a középsőnek 5-tel oszthatónak kell lennie. Ekkor a középső oszlop szorzatában ez a szám, és a 35 is szerepel, ezért a szorzat 25-tel is osztható. Emiatt viszont a középső sor szorzata is 25-tel osztható, tehát a középső szám is 25-tel osztható. Így viszont a középső oszlop szorzata már 125-tel is osztható lesz. Ezt folytatva adódik, hogy a középső számnak az 5 tetszőlegesen nagy hatványával oszhatónak kell lennie. Mivel csak pozitív egészeket írhatunk a mezőkbe, nincs megfelelő középső szám, így a kitöltés **nem lehetséges**.

2. Van 6 darab, egyforma, L-alakú műanyag lapunk, amelyek 3 egységnégyzetből vannak összeállítva: .
Mind a 6 műanyag lap felhasználásával építünk egybefüggő síkbeli alakzatokat úgy, hogy csak teljes négyzetoldal mentén szabad illeszteni a lapokat egymáshoz, és nem lehet a lapokat egymásra helyezni.
Lehet-e a kapott alakzat kerülete:

a) 18?

b) 25?

c) 28?

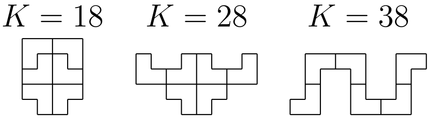
d) 38?

e) 40?

Ha igen, akkor mutass példát a megfelelő kerületű alakzatra! Ha nem, akkor bizonyítsd be, hogy nem lehet!

Az (a), (c), (d) kérdések esetén elérhető a megadott kerület, például az alábbi alakzatok esetén:

(a) $K = 18$ (c) $K = 28$ (d) $K = 38$



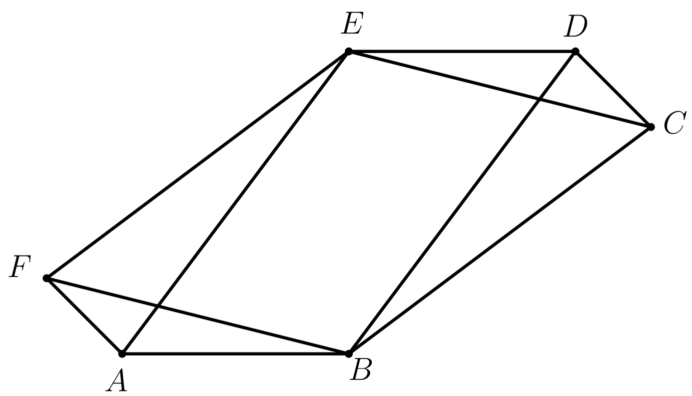
A fentiektől különböző helyes megoldások is elfogadhatók. Egy lap kerülete 8 egység, így a 6 darab összkerülete $6 \cdot 8 = 48$ egység. Az összeillesztett alakzat kerületébe az érintkező négyzetoldalak nem számítanak bele, ez összesen páros egységnyivel csökkenti a kerületet. Így a kerület mértéke csak páros lehet, nem lehet 25 egység. A (b) kérdésre a válasz így nemleges. Mivel az alakzat egybefüggő, legalább 5 lap-pár érintkezik egymással négyzetoldalban. Minden ilyen érintkezés legalább 2 egységnyivel csökkenti a kerületet, így az legfeljebb $48 - 2 \cdot 5 = 38$ egységnyi lehet. Tehát a kerület nem lehet 40 egység, így a (d) kérdésre is nemleges a válasz.

3. 8 pozitív egész szám szorzata 500-ra végződik. Hány páros szám lehet a 8 között? Minden általad lehetségesnek gondolt darabszámra mutass példát! Bizonyítsd, hogy más lehetőség nincs!

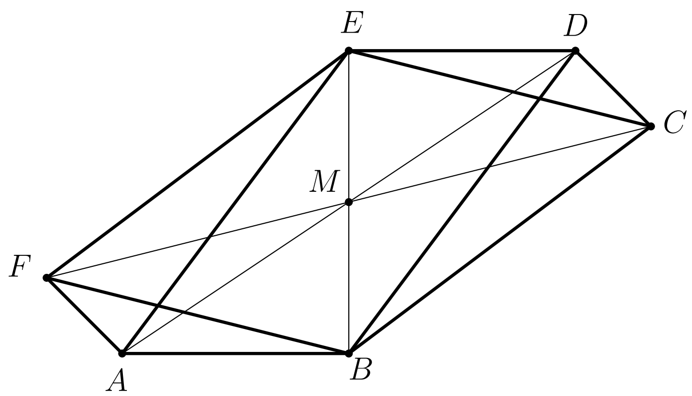
Egy tízes számrendszerben felírt szám pontosan akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két jegyéből alkotott kétjegyű szám osztható 4-gyel. Mivel a 00 osztható 4-gyel, ebből következik, hogy a szorzat osztható 4-gyel. Egy tízes számrendszerben felírt szám pontosan akkor osztható 8-cal, ha az utolsó három jegyéből alkotott kétjegyű szám osztható 8-cal. Az 500 nem osztható 8-cal, tehát a szorzat sem osztható 8-cal. Tehát a szorzat prímtényezős felbontásában a 2-es a második hatványon szerepel, azaz legalább egy és legfeljebb két páros szám van a 8 között. Ha csak egy számban szerepel 2-es prímtényező, akkor az illető szám osztható 4-gyel, de már 8-cal nem, a többi pedig mind páratlan. Erre egy lehetséges példa: 500, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1. Ha a 2-es prímtényező két számban is szerepel, akkor a 8 szám közül kettő páros, de már 4-gyel nem osztható, a többi pedig mind páratlan. Erre példa: 250, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

4. $ABCDEF$ egy konvex hatszög a síkban. Tudjuk, hogy az $ABDE$ és a $BCEF$ négyszögek paralelogrammák. Bizonyítsd be, hogy $CDFA$ négyszög is paralelogramma!

Készítsünk a feltételeket kielégítő ábrát:




Mivel $ABDE$ paralelogramma, így $AD$ és $BE$ kölcsönösen felezik egymást. Hasonlóan, mivel $BCEF$ is paralelogramma, így $BE$ és $CF$ szintén kölcsönösen felezik egymást. Ezek szerint a $BE$ szakaszt mind $AD$, mind $CF$ felezi, így a felezőpont egyértelműsége miatt egymást $BE$ felezőpontjában metszik (mondjuk $M$-ben).




Sőt, mivel $BE$ mindkettőt felezte, így az $M$ pont mind $AD$-nek, mind pedig $CF$-nek felezőpontja. Azaz $AD$ és $CF$ egymást kölcsönösen felezik, és mivel nem esnek egy egyenesre, ez éppen azt jelenti, hogy $AFDC$ paralelogramma.

5. Egy nagy asztalra piros (P) és kék (K) korongokat pakolunk. Az első sorba 100 darabot helyezünk el. Ezt követően az első sor alá két-két korong közé egy-egy újabbat teszünk, mégpedig úgy, hogy két egyforma alá pirosat, két különböző alá kéket rakunk. Majd ugyanezt a szabályt mindig egy-egy sorral lejjebb alkalmazva teszünk korongokat a harmadik, negyedik, ..., végül a századik sorba (ide már csak egyetlen korong kerül).
Igaz-e, hogy ha az első sorban van kék korong, akkor összesen legalább 100 kék korong lesz az asztalon?

*Első megoldás.* Ha egy sorban van kék korong, akkor az összes felette levőben is van. Ez azért igaz, mert kék korongot akkor helyezünk le, ha felette egy kék és egy piros volt szomszédos. Ha az utolsó sor egyetlen korongja kék, akkor a fentiek miatt mind a 100 sorban van legalább egy-egy. Így van összesen legalább 100 kék korong. Ha a legalsó sorban piros korong van, akkor vegyük az a sort, amelyik a kék korongokat tartalmazó sorok közül a legalacsonyabban van. Mivel alatta csupa piros korong van, így ebben a sorban minden korong egyforma színű, tehát mindegyik kék. Legyen ebben a sorban $k$ darab kék korong. Mivel minden sorban eggyel kevesebb korong van, mint az előzőben, így efelett még $100 - k$ darab sor van. Ezek mindegyikében van legalább egy-egy kék korong az első megállapításunk szerint, ez legalább $100 - k$ darab. Így összesen legalább $k + (100 - k) = 100$ darab kék korong, tehát az állítás **igaz**.

*Második megoldás.* Ha egy sorban van kék korong, akkor az összes felette lévő sorban is van. Ez azért igaz, mert kék korongot akkor helyezünk le, ha felette egy kék és egy piros volt szomszédos. A kirakás után egyértelműen létezik egy olyan sor, amelyben még van kék korong, de alatta már nincs. Ha ez az $n$-edik sor, akkor a felette lévő $n-1$ sor mindegyikében van legalább egy-egy kék korong, ami legalább $n - 1$ kék korong. Ha az $n$-edik sor alatt még vannak korongok, azok mind pirosak. Így az $n$-edik sorban nem lehet egymás mellett piros és kék korong, hiszen alájuk kék kerülne. Mivel kék korong van ebben a sorban, és kék mellett nem lehet piros, így mindegyik kék. Mivel az első sorban 100 korong van, és minden sorban eggyel kevesebb, mint az előzőben, így az $n$-edik sorban $101 - n$ darab korong van, amelyek mindegyike kék. Így összesen legalább $(n-1)+(101-n) = 100$ darab kék korongot raktunk ki, tehát az állítás **igaz**.

1. Egy $10 \times 10$-es négyzetrács minden kis négyzete fehérre vagy feketére van színezve. Egy lépésben egy sor vagy oszlop minden kis négyzetének színét megváltoztathatjuk az ellenkezőjére. Bizonyítsd be, hogy a kiinduló állástól függetlenül elérhető ilyen lépésekkel az, hogy legalább 10-zel több négyzet legyen fekete, mint fehér!

Az első oszlop minden kis négyzete feketére változtatható: haladjunk rajta végig a mezőkön egyesével, és ahol fehér négyzet szerepel, annak a sorát változtassuk meg. Így tehát az első oszlop minden mezője feketévé válik. Ezután vizsgáljuk meg a maradék kilenc oszlopot külön-külön. Ahol a fekete mezők nincsenek kisebbségben, ne változtassunk, ahol viszont kisebbségben vannak, változtassuk meg az oszlopot. Az eredményül kapott táblázatban az első oszlop fekete, a többi oszlopban legalább annyi a fekete, mint a fehér mező, így a fekete mezők legalább tízzel többen vannak, mint a fehér mezők.

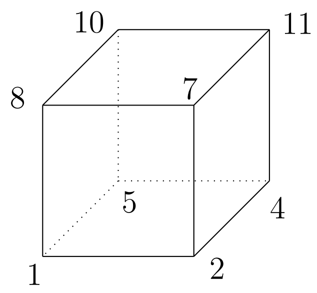
*Megjegyzés.* Ha már az első oszlopot feketére változtattuk, a megoldást a következőképpen is folytathatjuk: az első oszlopot elhagyjuk, és megnézzük, hogy a maradék $9 \times 10$-es táblázatban kisebbségben vannak-e a feketék. Ha nincsenek, nem csinálunk semmit. Ha viszont kisebbségben vannak a feketék a táblázatban, akkor mind a 9 oszlopban végrehajtjuk a változtatást. Így az egész $9 \times 10$-es rész az ellenkezőjére változott, vagyis most már többségben vannak benne a fekete mezők. Innen a befejezés ugyanaz, mint az eredeti megoldásban.

2. Jenő idén februárban a városban sétálgatott, amikor egy figyelemre méltó épületen meglátott egy ismertető táblát. A táblán sok érdekesség volt olvasható az épületről, többek között az is, hogy mikor építették. Kicsit elgondolkozott, majd megállapította, hogy 2015-öt követően lesz egy olyan év, amikor az aktuális évszám éppen a négyzete annak a számnak, ahány éves az épület abban az évben. 2015-ben az épület építésének hányadik évfordulóját ünneplik?

Tegyük fel, hogy $n$ éves lesz az épület majd a jövőben, amikor az akkori év értéke éppen $n^2$. Mivel jövő időről beszélünk, így $n^2 > 2015$. Innen azt kapjuk, hogy $n \geq 45$, hiszen $44^2 = 1936 < 2015$, $45^2 = 2025 > 2015$. Másrészt a múltban épült, azaz $n^2 - n = n(n-1) < 2015$. Mivel $45 \cdot 44 = 1980 < 2015$, $46 \cdot 45 = 2070 > 2015$, és az $n(n-1)$ szorzat értéke $n$ növelésével nő, így $n \leq 45$. Az eddigieket összevetve az $n$ egyetlen lehetséges értéke 45. Ezek szerint az épület 1980-ban épült, ami azt jelenti, hogy 2015-ben építésének **35**. évfordulóját ünnepli az épület.

3. Rá lehet-e írni egy kocka nyolc csúcsára a $0, 1, 2, \ldots, 12$ számok közül nyolcat úgy, hogy minden él két végpontjában a számok összege osztható legyen hárommal? (Minden számot legfeljebb egyszer használhatunk fel.)

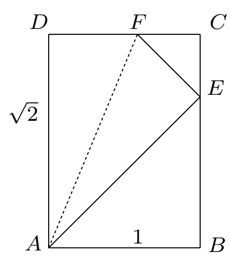
Egy lehetséges megoldás:




*Megjegyzés.* Ha valamelyik csúcsra 3-mal osztható számot írunk, akkor minden vele élszomszédos csúcson is 3-mal osztható számnak kell állnia: Ha valamelyik csúcsra 3-mal osztva 1, illetve 2 maradékot adó számot írunk, akkor minden vele élszomszédos csúcsra 3-mal osztva 2, illetve 1 maradékot adó számot kell írnunk: Mivel bármely csúcstól bármely csúcsig el lehet jutni az éleken lépdelve, ezért vagy minden csúcsra 3-mal osztható számot írunk, vagy egyikre sem írunk hárommal osztható számot: mivel 0-tól 12-ig 5 db 3-mal osztható szám van (0, 3, 6, 9, 12), így a feliratozás hárommal osztható számokkal nem végezhető el.

4. Egy téglalap alakú papírlap két oldala 1 és $\sqrt{2}$ egység. A papírlap egyik sarkát behajtjuk (egyenes hajtáséllel) úgy, hogy a hajtásél az egyik csúcsból indul, és a csúcsot nem tartalmazó rövidebbik oldalt metszi, valamint a behajtott csúcs éppen a hosszabb oldalra esik. Milyen messze van a hajtásél (csúcstól különböző) végpontja a legközelebbi csúcstól?

Rajzoljunk ábrát a feladat szövege alapján.




A hajtás miatt $AD = AE = \sqrt{2}$. Ekkor $ABE$ egy olyan derékszögű háromszög, melynek egyik befogója 1, átfogója pedig $\sqrt{2}$. A Pitagorasz-tétel miatt így $BE = 1$. (A négyzet átlójának hosszára is hivatkozhatunk.) Így $ABE$ egyenlő szárú is egyben, ami azt jelenti, hogy az $E$-nél lévő szöge 45°-os. Másrészt a hajtás miatt az $AEF\sphericalangle$ derékszög, s így a $FEC\sphericalangle$ szintén 45°-os, azaz az $FEC$ háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög. $CE = BC - BE = \sqrt{2} - 1$. A fentiekből következik, hogy $CF = CE = \sqrt{2} - 1$, vagyis a feladat kérdésére a válasz $\mathbf{\sqrt{2} - 1}$.

5. Egy $a_n$ sorozat tagjairól tudjuk, hogy minden pozitív egész $n$ esetén

$$a_{2n} = a_n \text{ és } a_{2n+1} = a_n + a_1,$$

továbbá $a_{1000} = 6$. Mennyi $a_{2015}$ értéke?

*Első megoldás.* Nézzük meg, mit deríthetünk ki abból, hogy $a_{1000} = 6$:

$$6 = a_{1000} = a_{500} = a_{250} = a_{125} = a_{62} + a_1 = a_{31} + a_1 = a_{15} + 2a_1 = a_7 + 3a_1 = a_3 + 4a_1 = 6a_1,$$

vagyis $a_1 = 1$.

Ezt felhasználva:

$$a_{2015} = a_{1007} + a_1 = a_{503} + 2a_1 = a_{251} + a_1 = a_{125} + 4a_1 = a_{1000} + 4a_1 = 10a_1 = 10,$$

azaz $a_{2015}$ értéke **10**.

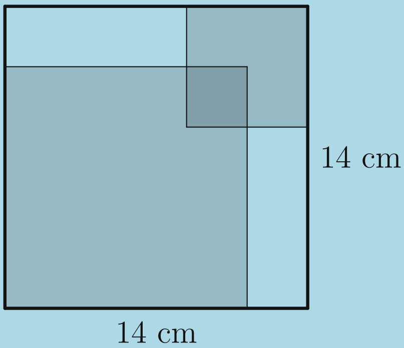
*Második megoldás.* Vegyük észre, hogy ha $b_n$ azt jelöli, hogy hány egyes van az $n$ szám kettes számrendszerbeli alakjában, akkor $b_n$ is teljesíti a feladatban szereplő feltételt: $b_{2n} = b_n$ és $b_{2n+1} = b_n + b_1$. Vegyük észre azt is, hogy $b_{1000} = 6$. Mivel a sorozat 1000. tagja és a képzési szabály egyértelműen meghatározza a sorozat minden tagját, ezért $a_{1000} = b_{1000}$ alapján $a_n = b_n$. Így $a_{2015} = b_{2015} =$ **10** (hiszen 2015=1024+512+256+128+64+16+8+4+2+1).

*Megjegyzés.* A fenti második megoldás akkor lenne teljesen pontos, ha bebizonyítanánk, hogy a képzési szabályt kielégítő sorozatok egy konstans szorzó erejéig egyértelműek.

1. Egy háromjegyű szám középső számjegyét elhagyva egy kétjegyű számot kaptunk. A két szám összege 816. Mi lehet ez a két szám?

A háromjegyű szám első számjegye 7. 6 kevés lenne, mert így az összeg legfeljebb $699 + 69 = 768$ lenne, 8 pedig sok, mert úgy az összeg legalább $800 + 80 = 880$ lenne. Az összeg 6-ra végződik és ez két egyforma számjegy összege, ezért csak itt $3 + 3 = 6$, vagy $8 + 8 = 16$ lehetséges. Ezért az utolsó számjegy 3 vagy 8. Ha az utolsó számjegy 3, akkor a kétjegyű szám 73, így $816 - 73 = 743$ a háromjegyű. Ha az utolsó számjegy 8, akkor a kétjegyű szám 78, így $816 - 78 = 738$ a háromjegyű.

2. Egy 14 cm oldalú négyzet két átellenes sarkába beillesztettünk egy-egy kisebb négyzetet úgy, hogy két szomszédos oldaluk illeszkedik a nagy négyzet oldalaira.




A kis négyzetek közül a nagyobb területe a kisebb területének 4-szerese. A két kis négyzetnek keletkezett közös része, ennek területe 1 cm$^2$. Mekkora a nagy négyzetnek a kicsik által le nem fedett területe?

*Első megoldás.* Jelölje $x$ a legkisebb négyzet oldalát. Mivel a másik négyzet területe 4-szerese a kicsinek, ezért az oldala 2-szerese, azaz $2x$. A közös rész 1 cm$^2$ területű négyzet, így ennek oldala 1 cm-es. A legnagyobb négyzet oldalát megkapjuk a kisebbekből: $14 = x + 2x - 1$. Ebből a kisebb négyzetek oldala 5 cm és 10 cm. (*) A kisebb négyzetek területe 25 cm$^2$, és 100 cm$^2$. A két négyzet területe együtt 25+100-1 = 124 cm$^2$ (a közös rész levonásával). A kimaradó terület ezért $14 \cdot 14 - 124 = 196 - 124 = 72$ cm$^2$.

*Második megoldás.* (*)-tól folytatva: A nem színezett részek egyforma (egybevágó) téglalapok. A rövidebb oldal hossza $14 - 10 = 4$ cm, a hosszabbiké $14 - 5 = 9$ cm. A 2 téglalap együttes területe ezért $2 \cdot 4 \cdot 9 = 72$ cm$^2$.

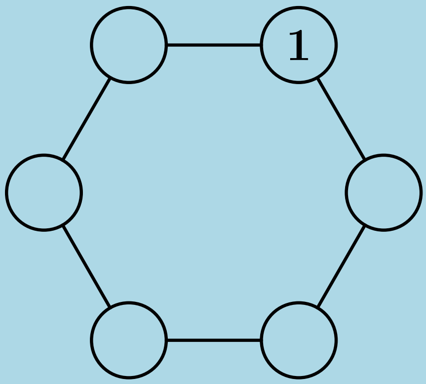
3. Belenéztünk a tanárok tolltartóiba, és a következőt figyeltük meg: mindegyikben tollak és ceruzák voltak, tollból is, és ceruzából is legalább egy. Minden darab fekete vagy piros színű, és minden tolltartóban van mindkét színből. Igaz-e, hogy mindegyik tolltartóban van két olyan íróeszköz, amelyik színben is, fajtában is különbözik?

*Első megoldás.* Válasszunk egy tollat és egy ceruzát (van mindkettő). *A pont azért az ötletért jár, hogy két különböző fajtát választ. Ez lehet két különböző szín is, a gondolatmenet nyilván ugyanez lesz a színek, illetve a formák szerepcseréjével.*
Ha ezek különböző színűek, akkor készen vagyunk. Ha viszont egyformák, akkor van a

tolltartóban a másik színből is egy íróeszköz. Ha ez toll, akkor az előbbi ceruzával, ha ceruza, akkor az előbbi tollal alkotnak megfelelő párt. Ugyanezt mondhatjuk bármelyik tolltartóról. A válasz tehát igen.

*Második megoldás.* Vegyünk a tolltartóból egy ceruzát (van benne). Ez piros vagy fekete. Legyen piros. (Feketével ugyanígy megy.)
Ha van fekete toll, készen vagyunk. Ha nincs, akkor minden toll piros, ezért a ceruzák közt kell lennie feketének, mert van fekete is a tolltartóban. Ugyanezt mondhatjuk bármelyik tolltartóról. A válasz tehát igen. *Megjegyzés.* Nyilván ennél a gondolatmenetnél is felcserélhető a színek és formák szerepe.

4. Egy hatszög csúcsaiba az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat írjuk, mindet pontosan egy csúcsba. Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy minden csúcsba írt számra igaz, hogy vagy mindkét szomszédja nagyobb nála, vagy mindkettő kisebb?




*Első megoldás.* Betűzzük meg az 1-estől körüljárva a mezőket: $1, a, b, c, d, e$.
1 és 2 nem lehetnek szomszédok, mert 2-nél csak az 1 kisebb. A 2-t ezért csak két helyre tehetjük, az 1-gyel szembe ($c$), vagy az 1 másodszomszédjának ($b$, vagy $d$, de ez mindegy, mert tükrösek az 1-$c$ átlóra - a tükröseket később számoljuk). I. eset: $b = 2$ (másodszomszéd) Most $d$ szomszédai csak $d$-nél nagyobbak lehetnek, mert az egyiknek az 1, a másiknak a 2 a $d$-től különböző szomszédja. Így $d = 3$ vagy $d = 4$. Ha $d = 3$, akkor a másik 3 mezőre a $4, 5, 6$ számok minden lehetséges elhelyezése megfelel a feltételnek. Ilyen elhelyezés $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ van (nem elvárás, hogy szorzással számoljon, felsorolhat, rendezhet). Ha $d = 4$, akkor mellé már csak az $5, 6$ kerülhet, ezeket 2-féleképpen tehetjük le. II. eset: $c = 2$ Így a szomszédos $b$ és $a$ mezőknek van kisebb szomszédja, tehát mindkettőnek kisebbnek kéne lenni a másiknál, ami lehetetlen. Itt tehát nincs megoldás. Ez összesen 8 lehetőség, valamint ezek szimmetrikus párjai: $8 \cdot 2 = 16$ kitöltés.

*Második megoldás.* Az 1-estől körbehaladva egy kisebbet egy nagyobb, majd azt egy az előzőnél kisebb szám követi és így tovább. Azaz az elrendezés olyan, hogy „Nagy", „Kicsi", „Nagy", „Kicsi", „Nagy", „Kicsi". Az 1 és a 2 csak „Kicsi" lehet, mert nincs 2 darab kisebb szám náluk, az 5 és a 6 pedig csak „Nagy" lehet hasonló okból. A 3 lehet „Kicsi" vagy „Nagy": I. eset: a 3 „Kicsi". Az 1 rögzített, a 2 és a 3 kétféleképpen helyezhető el. Ehhez a 4, 5, 6 számokat a maradék 3 helyre $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ féleképpen helyezhetjük el. Ez összesen $2 \cdot 6 = 12$ elhelyezés. II.eset: a 3 „Nagy". Ekkor a 3 csak az 1 és a 2 közé kerülhet, mert csak ezek kisebbek nála, tehát a 3 az 1 szomszédja - ami kétféleképp lehetséges. A fennmaradó 3 hely szomszédos, itt a 4 kerül középre, és az 5 és 6 helyet cserélhet. Itt tehát $2 \cdot 2 = 4$ újabb lehetőségünk van. Összesen 12+4=16.

5. Adott 5 pozitív egész szám, amelyeknek felhasználásával az összes lehetséges 3-tagú összeget elkészítettük. Így ezeket a számokat kaptuk:

$$10, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 24, 25.$$

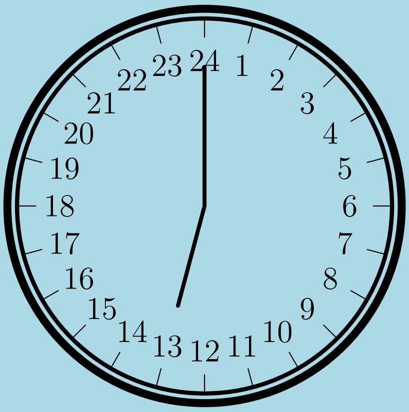
Mi lehetett az eredeti 5 szám?

*Első megoldás.* Ha összeadjuk a számokat, akkor a keresett számok összegének 6-szorosát kapjuk, mivel minden szám 6 összegben szerepel. Így az eredeti számok összege $180 : 6 = 30$. Ezért ha az 5 szám közül háromnak az összegét tudjuk, akkor tudjuk a másik 2 szám összegét, hiszen a 30-ból csak ki kell vonnunk az eredeti háromtagú összeget. Ezek szerint az 5 szám közül bármelyik 2-nek az összege rendre: $20, 16, 15, 14, 13, 12, 10, 9, 6, 5$. Látható, hogy 4 páratlan számot kaptunk a kéttagú összegek között. Ez csakis abban az esetben lehetséges, ha az eredeti számok közül 1 páros, a többi 4 pedig páratlan. Mivel az az egy szerepel abban a négy darab összegben, aminek az értéke páratlan, csak ezzel a négy összeggel kell foglalkoznunk $(15, 13, 9, 5)$. Ha ezeket összeadjuk (42), akkor ebben az összegben 4-szer szerepel a páros számunk, és minden páratlan pontosan egyszer. Vagyis minden szám szerepel benne egyszer, és még a páros számunk pluszban háromszor. Mivel a számok összegét már ismerjük (30), így a páros számunk $42 - 30 = 12$-nek a harmada, azaz 4. Mivel a 4-nek a többivel alkotott összegei rendre a korábbiak értelmében $15, 13, 9, 5$, így a többi szám azonnal adódik: $11, 9, 5, 1$. Ezt könnyen le is ellenőrizhetjük.

*Második megoldás.* A hat szám összege 30 (ld. első megoldás). Növekvő számsorrendben jelöljük a számokat: $a, b, c, d, e$.
A legnagyobb összeg a három legnagyobb szám összege, a legkisebb pedig a három legkisebbé. Mivel e két összegben csak a középső szám közös, ezeket összeadva kétszer számoljuk a középsőt. Ha tehát levonjuk az 5 szám összegét, megkapjuk a középső számot: $10+25-30 = 5$. A középső szám tehát 5, azaz $c = 5$. $a + b + c = 10$ miatt $a + b = 5$, innen a két ,,kicsi" szám lehet 1 és 4, vagy 2 és 3. Ha $a = 2$ és $b = 3$, akkor $d + e = 30 - 10 = 20$ miatt $d + e + b = 23$, ami nem szerepel az összegek között, ez tehát nem ad megoldást. A másik eset $a = 1$ és $b = 4$. A $d + e = 20$ miatt most $d$ és $e$ lehetnek $(6; 14), (7; 13), 8; 12)$ vagy $(9; 11)$. Ezek közül az első kettővel nem áll elő a 18 összegként, a harmadikkal pedig a 17. A $(9; 11)$ páros jó, a számok tehát: $1, 4, 5, 9, 11$.

**5. osztály, 2. nap** **Országos döntő**

1. Anna és András hosszú ideje arról álmodozik, hogy kapnak egy-egy 24 órás beosztású mutatós órát.




Tibi bácsi, az ismerős órásmester meglepi őket egy-egy ilyen órával. Anna órája kétszer olyan gyorsan jár, mint ahogy kellene, de szerencsére a megfelelő irányban. A másik tökéletes tempóban jár, viszont visszafelé. 13:00-kor mindkét óra a pontos időt mutatja. Mikor mutatják legközelebb ugyanazt az időt?

Amikor legközelebb ugyanazt az időt mutatják, addigra a két kismutató együtt egy teljes kört tesz meg, azaz 24 órát jár be. Anna órája a megfelelő irányban kétszer annyit tesz meg, mint amennyit András órája a helytelen irányban. Ez azt jelenti, hogy Anna órájának kismutatója kétszer annyi órát jár be, mint Andrásé. Azaz a 24 órát három egyenlő részre kell felosztanunk, ebből két rész a gyorsabb óráé. Ezért 16 óra a gyorsabbé és 8 óra a lassabbé. Anna órája tehát 16 órát halad a rendes irányba, Andrásé pedig az ellenkező irányba 8 órát. (Mivel 13 órától indultak el, így 13-8=5 óránál találkoznak.) Tehát 8 óra telik el a legközelebbi találkozásig, így ekkor a pontos idő: 21.00.

2. Négy ötödikes diák a matekszakkörön a következő feladvánnyal lepte meg a többieket: tegnap megmértük mind a négyünk súlyát. Minden mérés után kiszámítottuk az addigi mérések átlagát, és azt tapasztaltuk, hogy minden mérés után az átlag 1-gyel nőtt. Mennyivel nehezebb közülünk a legnehezebb a legkönnyebbnél? (Egy szám átlaga saját maga, két szám átlaga a két szám összegének fele, három szám átlaga a három szám összegének harmada, négy szám átlaga pedig a négy szám összegének negyede.)

*Első megoldás.* Az világos, hogy a gyerekek nehezedő sorrendben mérték meg magukat, hiszen az átlaguk csak így nőhet. Legyenek a gyerekek fiktív módon elnevezve nehezedő sorrendben: $A, B, C, D$. Az első mérés után az átlag A tömegével egyezik meg. A második mérés után az átlag úgy tud 1 kg-mal nőni, ha B tömege 1 kg-mal több az új átlagnál, azaz 2 kg-mal több A-nál. Jön a harmadik gyerek, akinek a megmérése után az átlag ismét 1 kg-mal több lesz, azaz éppen B tömegével lesz egyenlő. Mivel ekkor 2 kg-mal több az átlag A tömegénél, B tömegével egyenlő, így C éppen 2 kg-mal nehezebb, mint az átlag, azaz 4 kg-mal nehezebb A-nál, és 2 kg-mal B-nél. Az utolsó mérés után az átlag ismételten nő 1 kg-mal, azaz A tömegénél 3 kg-mal, B tömegénél 1 kg-mal lesz több, C tömegénél pedig 1 kg-mal lesz kevesebb. Így D tömege 3 kg-mal több C-nél, ami azt jelenti, hogy A-nál, azaz a legkönnyebbnél a D 6 kg-mal nehezebb.

*Második megoldás.* Csak úgy növekedhet az átlag, ha nehezedő sorrendben mérték meg a tömegüket. Ha az emberek tömegének mérőszámait egyszerre ugyanannyival csökkentjük vagy növeljük, akkor az átlag is ugyanezzel az értékkel csökken vagy nő. Tehát akármilyen tömegértéket adhatunk a legkönnyebb gyereknek, a többiek rendre ugyanannyival lesznek nehezebbek a könnyebbeknél. Legyen ez a tömegérték az egyszerűség kedvéért 0. Ezután könnyű számolással jönnek a többi értékek: 2, 4, 6. Tehát a legnehezebb 6 kilóval nehezebb a legkönnyebbnél.

3. Peti egy $4 \times 4$-es táblázatot kitöltött számokkal. Elárulta, hogy egy szám jobb oldali szomszédja mindig ugyanannyival nagyobb az eredetinél, de nem mondta meg, hogy mennyivel. Azt is elmondta, hogy egy szám alsó szomszédja mindig ugyanannyival nagyobb az eredetinél, de itt sem árulta el, hogy mennyivel. Az 1. sor 1. mezőjébe (bal felső sarok) 7, a 3. sor 4. mezőjébe 33, a 4. sor 2. mezőjébe 32 került. Milyen számokat írt Peti a táblázat többi mezőjébe?

*Első megoldás.* A jobbra lépés növekedése legyen $J$, a lefelé pedig $L$. A jobb alsó mezőre lépjünk a 32-ből és a 33-ból: $32 + 2J = 33 + L$, azaz $L = 2J - 1$. Most a 7-ből jussunk el a 32-be: $32 = 7 + J + 3L = 7 + J + 6J - 3 = 7J + 4$, ahonnan $J = 4$ adódik, onnan pedig $L = 7$. A táblázat így:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 11 | 15 | 19 |
| 14 | 18 | 22 | 26 |
| 21 | 25 | 29 | 33 |
| 28 | 32 | 36 | 40 |

*Második megoldás.* A 32-ről a 33-ra lólépésben jutunk (2 jobbra, 1 felfelé). Ezt a lépést alkalmazva minden esetben ugyanannyival változik az összeg,

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | | | | | | | 35 |
| | | | | | 34 | | |
| | | | 33 | | | | |
| | 32 | | | | | | |

ezért ilyen lépésekkel haladva a 32, 33, 34, 35 számokra lépünk, ezzel az első sorba jutottunk. A 35 a 32-től a 3. lépés, tehát jobbra $3 \cdot 2 = 6$ mezőt haladtunk. a 7-től pedig 7-et. Emiatt a jobbra lépés értéke +4. Ebből a lefelé lépés értéke +7. Ezekkel az értékekkel számolva 7-ről a 33-ra is eljutunk, és kapjuk a fenti táblázatot.

4. Egy vonalzóról lekopott a jelek egy része, mindössze öt darab, egész centimétert jelölő beosztás maradt meg: ezek növekvő sorrendben 0, $a$, $b$, $c$ és $d$ centimétert jelölnek. Ennek ellenére a vonalzóval 1-től $d$-ig bármilyen egész centiméteres távolságot *közvetlenül* le tudunk mérni. (Egy távolságot akkor tudunk *közvetlenül* lemérni, ha van a vonalzónak két beosztása, amelyek távolsága éppen ekkora.) Tudjuk, hogy az utolsó beosztásnak, $d$-nek az értéke 6-nál nagyobb. Készíts ilyen vonalzókat minél több különböző $d$ értékkel! (Nem kell indokolni, hogy az általad megadottnál többféle $d$ érték nem lehetséges. Azt viszont indokolni kell, hogy az általad megadott vonalzó megfelel a feltételeknek.)

A $d = 7$-re egy lehetséges konstrukció: $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$ és $d = 7$. Mérések: 1-et a 0 és $a$ között, 2-t a 0 és $b$ között, 3-at $a$ és $c$ között, 4-et 0 és $c$ között, 5-öt $b$ és $d$ között, 6-ot $a$ és $d$ között, végül 7-et 0 és $d$ között. A $d = 8$-re egy lehetséges konstrukció: $a = 1$, $b = 4$,

$c = 6$ és $d = 8$. Mérések: 1-et a 0 és $a$ között, 2-t a $b$ és $c$ között, 3-at $a$ és $b$ között, 4-et 0 és $b$ között, 5-öt $a$ és $c$ között, 6-ot 0 és $c$ között, 7-et $a$ és $d$ között, végül 8-at 0 és $d$ között. A $d = 9$ a lehetséges maximum, ez elérhető az $a = 1$, $b = 4$, $c = 7$ és $d = 9$ beosztásokkal. Mérések: 1-et a 0 és $a$ között, 2-t a $c$ és $d$ között, 3-at $a$ és $b$ között, 4-et 0 és $b$ között, 5-öt $b$ és $d$ között, 6-ot $a$ és $c$ között, 7-et 0 és $c$ között, 8-at $a$ és $d$ között, végül 9-et 0 és 9 között.

**6. osztály, 1. nap** **Országos döntő**

1. Belenéztünk a tanárok tolltartóiba, és a következőt figyeltük meg: mindegyikben tollak voltak és ceruzák, tollból is, és ceruzából is legalább egy. Minden darab fekete vagy piros színű, és minden tolltartóban van mindkét színből. Igaz-e, hogy mindegyik tolltartóban van két olyan íróeszköz, amelyik színben is, fajtában is különbözik?

*Első megoldás.* Válasszunk egy tollat és egy ceruzát (van mindkettő). *A pont azért az ötletért jár, hogy két különböző fajtát választ. Ez lehet két különböző szín is, a gondolatmenet nyilván ugyanez lesz a színek, ill. formák szerepcseréjével.*
Ha ezek különböző színűek, akkor készen vagyunk. Ha viszont egyformák, akkor van a tolltartóban a másik színből is egy íróeszköz. Ha ez toll, akkor az előbbi ceruzával, ha ceruza, akkor az előbbi tollal alkotnak megfelelő párt. Ugyanezt mondhatjuk bármelyik tolltartóról. A válasz tehát igen.

*Második megoldás.* Vegyünk a tolltartóból egy ceruzát (van benne). Ez piros vagy fekete. Legyen piros. (Feketével ugyanígy megy.)
Ha van fekete toll, készen vagyunk. Ha nincs, akkor minden toll piros, ezért a ceruzák közt kell lennie feketének, mert van fekete is a tolltartóban. Ugyanezt mondhatjuk bármelyik tolltartóról. A válasz tehát igen. *Nyilván ennél a gondolatmenetnél is felcserélhető a színek és formák szerepe.*

2. Egy taxis cég könnyen megjegyezhető telefonszámot szeretne, ezért úgy döntenek, hogy legfeljebb kétféle számjegyet fognak használni. Az kötelező érvényű, hogy egy taxitársaság telefonszáma csak 3-assal kezdődhet, és csakis 6-jegyű lehet. Hány különböző lehetőségből választhatnak?

*Első megoldás.* Legyen $x$ a másik számjegy, feltéve hogy nem csupa 3-asból áll a szám. Az első jegy kötelezően 3. Ha rögzítjük a másik lehetséges számjegyet, akkor a következő 5 jegy mindegyike 3 vagy $x$ $(\neq 3)$ lehet. Ez $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ lehetőség. (*) A csupa hármas számjegyet tartalmazót külön vesszük, így marad 31 olyan eset, amikor 3 és $x$ is szerepel. Mivel $x$ értéke lehet $0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, ami 9 lehetőség, ezért összesen $9 \cdot 31 + 1 = 280$ lehetőség közül választhat a társaság.

*Második megoldás.* (*)-tól folytatva: A másik számjegy 9-féle lehet, ami $9 \cdot 32$ lehetőség. Ekkor azonban a csupa hármast minden számjegynél megszámoltuk, pedig csak egyszer akartuk. Vagyis 8-cal többször számoltuk, mint akartuk. Ezért összesen $9 \cdot 32 - 8 = 280$ lehetőség van a telefonszám megválasztására.

*Harmadik megoldás.* Csoportosítsuk a lehetséges telefonszámokat aszerint, hogy hányadik helyen fordul elő először a nem 3-as számjegy. Az első helyen 9 lehetőség közül választhatunk, hiszen bármely nem 3-as számjegy lehet az első. Az ezt követő helyeken mindig két választásunk lesz, hiszen vagy 3-at vagy a választott egyéb számjegyet használhatjuk. Ha a második számjegy lesz 3-astól különböző, akkor $9 \cdot 2^4 = 144$ eset van, ha a harmadik, akkor $9 \cdot 2^3 = 72$ eset. Ha a negyedik számjegy lesz 3-astól különböző, akkor $9 \cdot 2^2 = 36$ eset van, ha az ötödik, akkor $9 \cdot 2 = 18$ eset, ha pedig csak az utolsó számjegy más, akkor 9. 1 esetben pedig nem lesz más számjegy csak a 3-as, amikor a 333333 a telefonszám. Ez összesen: $144 + 72 + 36 + 18 + 9 + 1 = 280$ lehetőség közül választhat a társaság.

*Negyedik megoldás.* Számoljuk meg a telefonszámokat annak alapján, hogy hány 3-astól különböző jegyet tartalmaz. Egyedül a 333333 olyan, amiben nincs más számjegy. Ha egyetlen 3-astól különböző számjegy van, akkor az 5 helyen lehet (az első számjegy biztosan 3-as), a számjegy lehet 9 féle, így összesen 45 ilyen szám van. Ha kettő 3-astól különböző van, akkor az egyik ilyen jegy 5 helyen lehet, a másik 4 helyen, ami $5 \cdot 4$ lehetőség, de így mindent kétszer számoltunk, hiszen a választás sorrendje nem számít. A két 3-astól különböző számjegy tehát 10 helyen lehet, a számjegy pedig 9 féle, így összesen 90 ilyen szám van. Ha három 3-astól különböző jegy van, akkor pontosan két 3-as van az első számjegyet leszámítva, ez a két hármas ugyanúgy 10 helyen lehet, a másik számjegy pedig továbbbra is 9 féle lehet, így ilyen számból is 90 van. Ugyanez a helyzet, ha négy 3-astól különböző van, ilyenből tehát 45 van, és 9 olyan szám van, amikor az mind az öt számjegy 3-astól különböző. Ez összesen $1 + 45 + 90 + 90 + 45 + 9 = 280$.

3. Az

$$1! + 2! + 3! + ... + 49!$$

számnak mi a tízes számrendszerbeli utolsó két számjegye? (Ahol $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.)

Az összeg utolsó két számjegyét egyértelműen meghatározza az összeadandók utolsó két számjegye. A 10!-tól kezdve minden faktoriális osztható 100-zal (2, 5 és 10 szerepel a szorzatban), így utolsó két számjegyük 00. Ezért elég az $1! + 2! + \ldots + 9!$ összeget vizsgálni. Az összeadandók utolsó két számjegye: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = \ldots 20$, $6! = \ldots 20$, $7! = \ldots 40$, $8! = \ldots 20$, $9! = \ldots 80$. Ezek összege $\ldots 13$-ra végződik. Így az eredeti szám utolsó két számjegye is **13**.

4. Egy táblán mindig egyetlen szám látható, kezdetben ez a szám az 1. Egy lépésben a táblán lévő számot növelhetjük 1-gyel, vagy a reciprokát vehetjük. Mutasd meg, hogy elérhető a fenti lépések alkalmazásával, hogy a táblán a 7/2015 legyen látható.

*Első megoldás.* Gondolkodjunk visszafelé! A 7/2015 előállításhoz elég a $\frac{2015}{7} = 287\frac{6}{7}$-et előállítani. Ezt megkaphatjuk az 1-gyel növelés ismételt alkalmazásával a $\frac{6}{7}$-ből. Ez utóbbihoz elég a $\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$-ot előállítani. Ezt pedig megkaphatjuk 1-gyel növeléssel az $\frac{1}{6}$-ból. Az 1-et 5-ször megnövelve, majd a reciprokát véve megkapjuk az $\frac{1}{6}$-ot, tehát elérhető, hogy a 7/2015 legyen a táblán.

*Második megoldás.* Az 1-gyel növelés ismételt alkalmazásával az összes $n$ pozitív egész szám előállítható. A reciprok segítségével így bármely $1/n$ alakú szám is felírható. Az 1/2-ről vagy az 1-ről indulva 1-gyel való növelés segítségével előáll az $n/2$ alakú számok. Reciprokot véve így a $2/n$ alakú számokat is felírhatjuk a táblára. Az 1/3, 2/3, 1 számok valamelyikéről indulva 1-gyel növeléssel megkapható az összes $n/3$ alakú szám. Reciprokvétellel pedig ezekből a $3/n$ alakúak is. Az eljárást folytatva sorra megkapjuk az $n/4$, $4/n$, $n/5$, $5/n$, $n/6$, $6/n$, ... alakú számokat. Így a $7/n$ alakú számokhoz érve megkapjuk a 7/2015-öt is.

5. 124 fekete és 1 piros kis kockából hány különböző $5 \times 5 \times 5$-ös kocka építhető, ha csak a nagy kocka felszíne alapján tudjuk megkülönböztetni a kockákat, és a forgatással egymásba vihetőket nem tekintjük különbözőnek?

Ha kocka csúcsánál van piros kis kocka, akkor ez összesen egyféleképpen lehetséges, mert a különböző csúcsok egymásba forgathatók. Ha a kocka élén van piros kis kocka, de nem a csúcsnál, akkor az összesen kétféleképpen lehetséges. Vagy az él középső kis kockája piros, vagy pedig a csúcs melletti. Ezek külön-külön mind egymásba forgathatók. Ha egy lap belső részén van piros kis kocka, akkor az háromféleképpen lehetséges. 1) A lap közepén. 2) A lap középső kis kockája és a csúcsnál lévő kis kocka között. 3) A lap középső kis kockája és az egyik él középső kis kockája között. Elképzelhető, hogy a kocka belsejében van a piros, vagyis a felület teljesen fekete. Ez 1 eset. Összesen tehát $1+2+3+1=7$ különböző kinézetű kocka képzelhető el.

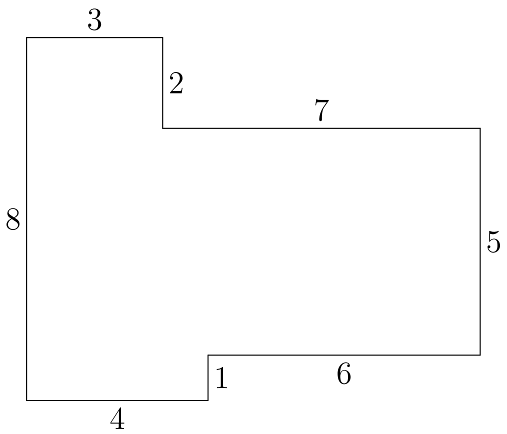
## 6. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. Felírtuk a táblára az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}$ számokat, majd közéjük a ,,+” és ,,-” műveleti jeleket tettük kedvünk szerint.
Lehet-e az eredmény 0?

Hozzuk közös nevezőre az összeget. A közös nevező $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ lesz. Az $\frac{1}{8}$-nak megfelelő tag számlálója páratlan lesz, hiszen a közös nevező nem osztható 8-nál nagyobb kettőhatvánnyal. A többi tag számlálója viszont páros lesz, hiszen nincs más 8-cal osztható nevező. A számlálók között tehát pontosan egy páratlan szám szerepel, ami azt jelenti, hogy a számláló biztosan páratlan. Így nem lehet 0, ezért az egész összeg sem lehet 0.

2. Egy $n$ oldalú sokszögről tudjuk, hogy bármely két szomszédos oldala merőleges egymásra, és oldalainak hossza $1, 2, \ldots, n$ egység (nem feltétlenül ebben a sorrendben). Mennyi az $n$ lehetséges legkisebb értéke?

Az $n$ értéke csak páros lehet, hiszen felváltva lesznek ,,függőleges” és ,,vízszintes” oldalai. Arra is szükségünk van még, hogy az $1, 2, \ldots, n$ számokat két egyenlő elemszámú részre lehessen osztani úgy, hogy a részek mindegyike két egyenlő összegű csoportra osztható. Ez szükséges feltétel, hiszen a két nagy csoportot a ,,függőleges” és a ,,vízszintes” oldalak adják, és már megállapítottuk, hogy a ,,vízszintes” és ,,függőleges” oldalak száma egyenlő. Kell azonban az is, hogy a ,,vízszintes” oldalakon belül a ,,balra” haladó oldalak (egy kijelölt körüljárás szerint) ugyanolyan összhosszt adjanak, mint a ,,jobbra” haladók. Ennek az az oka, hogy a sokszögnek záródnia kell. (Ugyanez igaz a ,,függőlegeseknél” a ,,felfelé” és ,,lefelé” haladó oldalakra.) Ez utóbbi miatt az is szükséges, hogy az $1+2+3+\cdots+n$ összeg páros legyen. Nézzük a páros $n$-eket. Az $n=4$ nem jó, mert bár az összeg 10, de nem lehet egyenlő összegekre bontani a két nagy csoportot, hiszen azokban csak egy-egy szám szerepelhetne. Az $n = 6$ esetén az $1 + 2 + \cdots + 6$ összeg páratlan. Az $n = 8$ teljesít minden feltételt, és több ilyen sokszög is létezik. Egy lehetséges konstrukció az alábbi:




3. Egy számmisztikával foglalkozó klub tagjai az $1, 2, 3, \ldots, 11$ számok közül némelyik számot szerencsésnek, a többit szerencsétlennek nevezik. A következőket árulták el a számaikról:

- Ha egy szám szerencsés, akkor az őt összegben 12-re kiegészítő szám is szerencsés.
- Ha egy szám szerencsés, akkor az osztói is szerencsés számok.
- Van páros szerencsés szám.
- A szerencsétlen számok száma is szerencsétlen szám.

Határozd meg, hogy melyek a szerencsés számok!

Mivel van páros szerencsés szám, ennek osztója az 1 és a 2, így ezek mindenképp szerencsés számok. Ebből következően a $12 - 2 = 10$ és a $12 - 1 = 11$ is szerencsés. Mivel 10-nek osztója, ezért az 5 is szerencsés, emiatt viszont a $12 - 5 = 7$ is az. Ekkor legfeljebb 5 darab szerencsétlen szám maradt. Mivel az 1, 2, 5 szerencsés számok, ezért szerencsétlen számból csak 3 vagy 4 darab lehet. Ha a 6 szerencsés lenne, akkor emiatt a 3 és emiatt a 9 is az lenne, vagyis 3-nál kevesebb szerencsétlen szám lenne, ami lehetetlen. Így a 6 szerencsétlen. A 4 és a 8, valamint a 3 és a 9 mindenképp együtt szerencsések vagy szerencsétlenek. Így a szerencsétlen számok száma csak 3 lehet. Ekkor viszont a 3 (és a 9) szerencsétlenek, tehát a 4 és a 8 szerencsések. Azaz a szerencsés számok: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11.

4. Egy vonalzóról lekopott a beosztások jelentős része, csak a $0, a, b, c, d$ centimétert jelző vonalak láthatóak, ahol $0 < a < b < c < d$ egész számok. Mekkora az a legnagyobb $d$ érték, amelyre a vonalzóval 1-től $d$-ig minden egész centiméteres távolságot *közvetlenül* le tudunk mérni? Bizonyítsd az állításod! (Egy távolságot akkor tudunk *közvetlenül* lemérni, ha van a vonalzónak két beosztása, amelyek távolsága éppen ekkora.)

A következő távolságokat tudjuk mérni:

$$a, b, c, d, b - a, c - b, d - c, c - a, d - b, d - a.$$

Ez legfeljebb 10 különböző érték, tehát $d \leq 10$. A $d = 10$ azt jelentené, hogy a fenti értékek mind különböznek. Így a beosztások közötti különbségek is mind mások. Vagyis a szomszédos beosztások közötti különbségek éppen az $1, 2, 3, 4$ számok. Ha ugyanis lenne közöttük legalább 5, akkor az összegük legalább $1 + 2 + 3 + 5 = 11$ lenne. Az 1 különbség nem kerülhet sem a 2, sem a 3 mellé, mert akkor a 3, illetve a 4 kétféleképpen is mérhető lenne. Vagyis az 1 különbség csak a szélén lehet, mégpedig úgy, hogy a 4 különbség követi. Ekkor azonban a 2 és a 3 is egymás mellé kerül, így az 5 kétféleképpen is mérhető lesz. ($1+4 = 2+3 = 5$.) A $d = 9$ elérhető az $a = 1$, $b = 4$, $c = 7$ és $d = 9$ beosztásokkal. Mérések: 1-et a 0 és $a$ között, 2-t a $c$ és $d$ között, 3-at $a$ és $b$ között, 4-et 0 és $b$ között, 5-öt $b$ és $d$ között, 6-ot $a$ és $c$ között, 7-et 0 és $c$ között, 8-at $a$ és $d$ között, végül 9-et 0 és 9 között.

## 7. osztály, 1. nap — Országos döntő

1. Az
$$1! + 2! + 3! + ... + 49!$$
számnak mi a tízes számrendszerbeli utolsó két számjegye? (Ahol $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.)

Az összeg utolsó két számjegyét egyértelműen meghatározza az összeadandók utolsó két számjegye. A 10!-tól kezdve minden faktoriális osztható 100-zal (2, 5 és 10 szerepel a szorzatban), így utolsó két számjegyük 00. Ezért elég az $1! + 2! + \ldots + 9!$ összeget vizsgálni. Az összeadandók utolsó két számjegye: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = \ldots 20$, $6! = \ldots 20$, $7! = \ldots 40$, $8! = \ldots 20$, $9! = \ldots 80$. Ezek összege $\ldots 13$-ra végződik. Így az eredeti szám utolsó két számjegye is **13**.

2. Pisti a síkot 100 különböző egyenessel felosztotta tartományokra, majd beszínezte az ábráján a sokszögeket. Hány olyan tartomány jöhetett létre, amelyet Pisti nem színezett be? Mutass példát minden lehetőségre, és bizonyítsd, hogy más nem lehet a nem színezett tartományok száma.

*Első megoldás.* Ha az összes egyenes párhuzamos egymással, akkor 101 tartomány keletkezik, amelyek egyike sem sokszög. Ha 99 párhuzamos egyeneshez teszünk 1 metsző egyenest, akkor 200 tartomány keletkezik, amelyek egyike sem sokszög. Megmutatjuk, hogy más lehetőség nincs a nem sokszög alakú részek számára. Mivel a csupa párhuzamos esetét már vizsgáltuk, tegyük fel, hogy van az egyenesek között két metsző. Belátjuk, hogy a keletkező tartományok közül pontosan 200 nem sokszög. Minden egyenesen keletkezik metszéspont, hiszen ha valamelyiken nem lenne, az azt jelentené, hogy az összes többi egyenes vele párhuzamos. Emiatt bármelyik egyenest a metszéspontok két félegyenesre, és köztük néhány (esetleg 0) szakaszra vágnak szét. Így összesen 200 félegyenes keletkezik. A nem sokszög alakú tartományok éppen azok, amelynek határoló alakzatai között félegyenes is található, méghozzá pontosan kettő. Minden félegyenes pontosan két (nem sokszög) tartományt határol. Így a nem sokszög alakú tartományok száma megegyezik a félegyenesek számával, vagyis 200-zal.

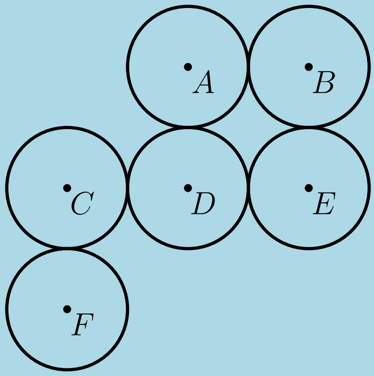
*Második megoldás.* Tegyük fel, hogy vannak az egyenesek között metszők. Ekkor bármely egyenesen van metszéspont, hiszen ha az egyiken nem lenne, akkor az összes egyenes párhuzamos lenne vele. Vegyünk egy olyan kört, amely a belsejében tartalmazza az egyenesek összes metszéspontját. A körvonal minden olyan tartományba belemetsz, ami nem sokszög, és csakis azokba (hiszen a sokszögek a belsejében vannak). A kört mindegyik egyenes két pontban metszi, így rajta 200 körív keletkezik. Egy ilyen körív végpontjai vagy egy egyenesen vannak, vagy két metsző egyenesre illeszkednek, vagy két párhuzamos egyenesre illeszkednek. Utóbbi esetben van olyan egyenes, ami mindkét párhuzamost metszi. Mivel metszéspontok csak a kör belsejében lehetnek, az így adódó egy, két vagy három egyenes elválasztja a körívet az összes többi körívtől. Így bármely két körív különböző tartományban van, tehát 200 olyan tartomány van, ami nem sokszög. Ha pedig minden egyenes párhuzamos, akkor 101 tartomány keletkezik, amelyek egyike sem sokszög. Így 101 vagy 200 ilyen tartomány van.

3. Egy táblán mindig egyetlen szám látható, kezdetben ez a szám az 1. Egy lépésben a táblán lévő számot növelhetjük 1-gyel, vagy a reciprokát vehetjük. Mutasd meg, hogy elérhető a fenti lépések alkalmazásával, hogy a táblán a 17/2015 legyen látható.

*Első megoldás.* Gondolkodjunk visszafelé! A 17/2015 előállításhoz elég a $\frac{2015}{17} = 118\frac{9}{17}$-et előállítani. Ezt megkaphatjuk az 1-gyel növelés ismételt alkalmazásával a $\frac{9}{17}$-ből. Ez utóbbihoz elég a $\frac{17}{9} = 1\frac{8}{9}$-et előállítani. Ezt pedig megkaphatjuk 1-gyel növeléssel a $\frac{8}{9}$-ből. Ehhez elég a $\frac{9}{8}$-ot előállítani, amely 1-gyel növeléssel kapható az $\frac{1}{8}$-ból. Az 1-et 7-szer megnövelve, majd a reciprokát véve megkapjuk az $\frac{1}{8}$-ot, tehát elérhető, hogy a 17/2015 legyen a táblán.

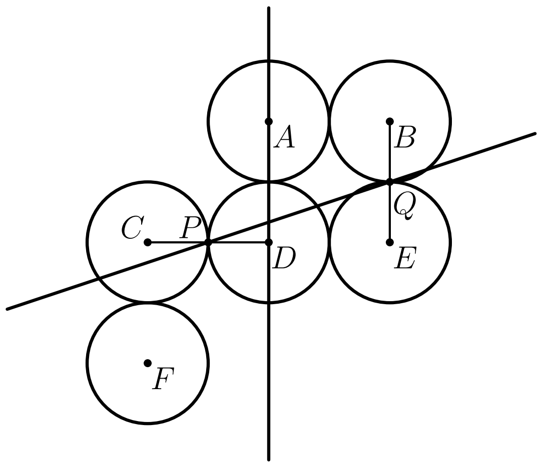
*Második megoldás.* Az 1-gyel növelés ismételt alkalmazásával az összes $n$ pozitív egész szám előállítható. A reciprok segítségével így bármely $1/n$ alakú szám is felírható. Az 1/2-ről vagy az 1-ről indulva 1-gyel való növelés segítségével előáll az $n/2$ alakú számok. Reciprokot véve így a $2/n$ alakú számokat is felírhatjuk a táblára. Az $1/3$, $2/3$, 1 számok valamelyikéről indulva 1-gyel növeléssel megkapható az összes $n/3$ alakú szám. Reciprokvétellel pedig ezekből a $3/n$ alakúak is. Az eljárást folytatva sorra megkapjuk az $n/4$, $4/n$, $n/5$, $5/n$, $n/6$, $6/n$, ... alakú számokat. Így a $17/n$ alakú számokhoz érve megkapjuk a 17/2015-öt is.

4. Adott 6 egységsugarú körlap, melyek az alábbi ábra szerint érintik egymást.




Szerkesztendő két különböző egyenes, amelyek mindegyike felezi a 6 körlapból álló alakzat területét. Írd le a szerkesztés menetét. A szerkesztést nem kell végrehajtani, de indokolni kell, hogy a kapott egyenesek miért felezik az alakzat területét.

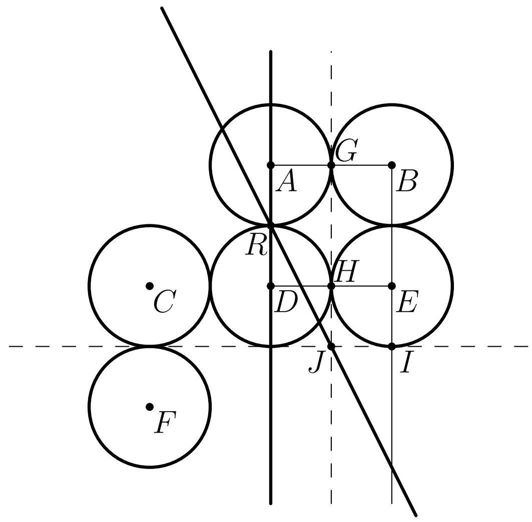
*Első megoldás.*



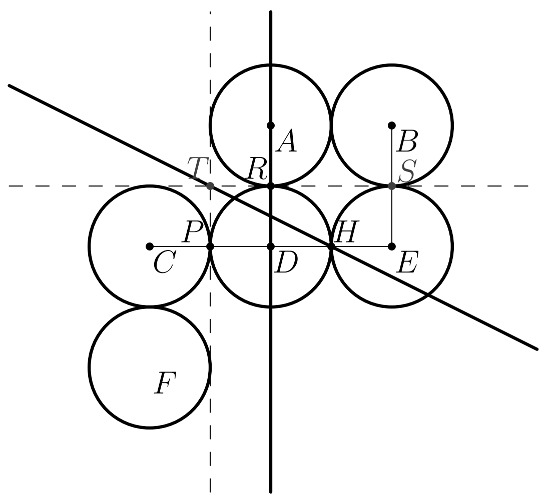

Az $AD$ egyenes nyilvánvalóan felezi az alakzat területét. A $CD$ szakasz, valamint a $C$ és $D$ középpontú körök közös pontja legyen $P$. Ez a pont az említett két körből álló alakzatnak szimmetria-középpontja. Így az $P$-n áthaladó egyenesek felezik ennek a két körnek a területét. A $BE$ szakasz, valamint a $B$ és $E$ középpontú körök közös pontja legyen $Q$. Ez a pont pedig ennek a két körből álló alakzatnak szimmetria-középpontja. Így a $Q$-n áthaladó egyenesek felezik ennek a két körnek a területét. A $PQ$ egyenes tehát mind a $C$ és $D$, mind a $B$ és $E$ középpontú körök területét felezi, és nyilvánvaló, hogy az $A$ és $F$ középpontú körök az egyenes különböző oldalán vannak, így a $PQ$ egyenes felezi a 6 körből álló alakzat területét.

*Második megoldás.* Az $AD$ egyenes nyilvánvalóan felezi az alakzat területét. Az $AD$ szakasz, valamint az $A$ és $D$ középpontú körök közös pontja legyen $R$. Ez a pont az említett két körből álló alakzatnak szimmetria-középpontja. Így az $R$-en áthaladó egyenesek felezik ennek a két körnek a területét. Ha olyan egyenest húzunk $R$-en át, amelynek egyik oldalán lesznek teljes egészében a $B$ és $E$, a másikon a $C$ és $F$ középpontú körök, akkor ez az felezi a 6 körből álló alakzat területét. Egy ilyen egyenes szerkesztése: az $AB$ szakasz segítségével megkapható az $A$ és $B$ középpontú körök érintési pontja ($G$), ugyanígy a $DE$ szakasszal a

$D$ és $E$ középpontú körök érintési pontja ($H$). A $BE$ félegyenes és az $E$ középpontú kör $B$-től távolabbi metszéspontja legyen $I$. Az $I$-ből $GH$ egyenesre állított merőleges talppontja legyen $J$. Ekkor az $RJ$ egyenes nyilvánvalóan megfelelő.




*Harmadik megoldás.*




Az $AD$ egyenes nyilvánvalóan felezi az alakzat területét. Az $DE$ szakasz, valamint az $D$ és $E$ középpontú körök közös pontja legyen $H$. Ez a pont az említett két körből álló alakzatnak szimmetria-középpontja. Így az $H$-n áthaladó egyenesek felezik ennek a két körnek a területét. Ha olyan egyenest húzunk $H$-n át, amelynek egyik oldalán lesznek teljes egészében a $A$ és $B$, a másikon a $C$ és $F$ középpontú körök, akkor ez az felezi a 6 körből álló alakzat területét. Egy ilyen egyenes szerkesztése: az $AD$ szakasz segítségével megkapható az $A$ és $D$ középpontú körök érintési pontja ($R$), ugyanígy a $BE$ szakasszal a $B$ és $E$ középpontú körök érintési pontja ($S$), illetve a $CD$ szakasszal a $C$ és $D$ középpontú körök érintési pontja ($P$). A $P$-ből $RS$ egyenesre állított merőleges talppontja legyen $T$. Ekkor a $HT$ egyenes nyilvánvalóan megfelelő.

5. Két rabló a következő módon osztozkodik a zsákmányolt aranytallérokon: „1 neked, 2 nekem, 3 neked, 4 nekem stb.”, amíg az aranytallérokból futja. A végén a soron következő rabló megkapja a maradék aranytallérokat. Tudjuk, hogy 1000 aranytallérnál kevesebb volt a zsákmányuk, és azt is, hogy az osztozkodás végén mindkét rabló egyforma számú aranytallért kapott. Legfeljebb hány aranytallér lehetett a zsákmány?

*Első megoldás.* Mivel egy lépéspárban a második rabló mindig 1-gyel több tallért kap, $2k$ számú teljes lépés után $k$-val több aranya van. Az utolsó (csonka) lépéspár innen kétféleképp adhat egyenlőséget: vagy az első kap $k$ darabot és ezzel vége, vagy az első kap $2k+1$-et és a második $k+1$-et. Az első esetben

$$1+2+\ldots+2k+k=\frac{(2k+1)2k}{2}+k=(2k+1)k+k=2k(k+1)$$

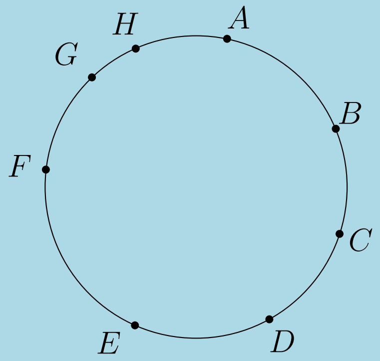
a tallérok száma, a második esetben pedig

$$1+2+\ldots+2k+1+k+1=\frac{(2k+2)(2k+1)}{2}+k+1=(k+1)(2k+1)+k+1=2(k+1)(k+1).$$

A $2k(k+1)$ alakú számokból 1000 alatt a $2\cdot 21\cdot 22=924$ a legnagyobb, a $2(k+1)(k+1)$ alakúakból pedig a $2\cdot 22\cdot 22=968$. Tehát legfeljebb 968 tallér lehetett a zsákmány.

*Második megoldás.* Nevezzük $A$-nak a rablót, aki 1 aranytallért kap, $B$-nek a másikat. Kétféle módon állhat elő a feladatban leírt helyzet: vagy mindkét rabló $n$-szer kap aranytallért, és $A$ kapja a maradékot, vagy $A$ $n$-szer, $B$ $n-1$-szer kap aranytallért, és $B$ kapja a maradékot. Az első esetben $B$ zsákmánya $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$ aranytallér. Ez az eset meg is valósulhat, mert a maradék, ami $A$-nak jut, $2+4+6+\ldots+2n-(1+3+\ldots+2n-1)=n$, ami kevesebb, mint $2n+1$. Ekkor a a zsákmány $2n(n+1)$ aranytallér, melynek legnagyobb lehetséges 1000-nél kisebb értéke a 924 ($n=21$ esetén). A második esetben $A$ zsákmánya $1+3+\ldots+2n-1=n^2$ aranytallér. A $B$-nek jutó maradék $1+3+\ldots+2n-1-(2+4+\ldots+2n-2)=n$, és ez lehetséges, mert kevesebb, mint $2n$. Ekkor a teljes zsákmány $2n^2$, melynek legnagyobb lehetséges 1000-nél kisebb értéke 968 ($n=22$ esetén). Tehát a feladat kérdésére a válasz: 968 aranytallér.

1. Adott egy kör kerületén 8 pont, $A, B, C, D, E, F, G, H$.




Hány olyan konvex sokszög létezik, amelynek az $AD$ szakasz átlója, csúcsai pedig a nyolc pont közül kerülnek ki?

Mivel $AD$ a sokszög átlója, ezért mindkét oldalán van legalább 1 csúcsa a sokszögnek. A $B$ és $C$ pontokat tartalmazó ívről így 3-féleképpen választhatunk ($C$, $D$, $CD$). Az $E$, $F$, $G$, $H$ pontokat tartalmazó ívről pedig $2^4 - 1 = 15$-féleképpen ($E$, $F$, $G$, $H$, $EF$, $EG$, $EH$, $FG$, $FH$, $GH$, $EFG$, $EFH$, $EFH$, $FGH$, $EFGH$). Mivel a két választás független, összesen $3 \cdot 15 = 45$ ilyen sokszög létezik.

2. Egy számmisztikával foglalkozó klub tagjai az $1, 2, 3, \ldots, 11$ számok közül némelyik számot szerencsésnek, a többit szerencsétlennek nevezik. A következőket árulták el a számaikról:

- Ha egy szám szerencsés, akkor az őt összegben 12-re kiegészítő szám is szerencsés.
- Ha egy szám szerencsés, akkor az osztói is szerencsés számok.
- Van páros szerencsés szám.
- A szerencsétlen számok száma is szerencsétlen szám.

Határozd meg, hogy melyek a szerencsés számok!

Mivel van páros szerencsés szám, ennek osztója az 1 és a 2, így ezek mindenképp szerencsés számok. Ebből következően a $12 - 2 = 10$ és a $12 - 1 = 11$ is szerencsés. Mivel 10-nek osztója, ezért az 5 is szerencsés, emiatt viszont a $12 - 5 = 7$ is az. Ekkor legfeljebb 5 darab szerencsétlen szám maradt. Mivel az 1, 2, 5 szerencsés számok, ezért szerencsétlen számból csak 3 vagy 4 darab lehet. Ha a 6 szerencsés lenne, akkor emiatt a 3 és emiatt a 9 is az lenne, vagyis 3-nál kevesebb szerencsétlen szám lenne, ami lehetetlen. Így a 6 szerencsétlen. A 4 és a 8, valamint a 3 és a 9 mindenképp együtt szerencsések vagy szerencsétlenek. Így a szerencsétlen számok száma csak 3 lehet. Ekkor viszont a 3 (és a 9) szerencsétlenek, tehát a 4 és a 8 szerencsések. Azaz a szerencsés számok: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11.

3. **Hány négyzetszám van az $1476, 14076, 140076, 1400076, 14000076, \ldots$ végtelen számsorozatban?**

A sorozat minden tagja $14 \cdot 10^k + 70 + 6$ alakú, ezért 7-tel osztva 6-ot ad maradékul. Nézzük a négyzetszámok 7-es maradékait. A maradékok szorzási szabálya alapján:

| $n$ 7-es maradéka | $n^2$ 7-es maradéka |
|---|---|
| 0 | $0 \cdot 0 = 0$ |
| 1 | $1 \cdot 1 = 1$ |
| 2 | $2 \cdot 2 = 4$ |
| 3 | $3 \cdot 3 = 9 \to 2$ |
| 4 | $4 \cdot 4 = 16 \to 2$ |
| 5 | $5 \cdot 5 = 25 \to 4$ |
| 6 | $6 \cdot 6 = 36 \to 1$ |

Látható, hogy négyzetszám 7-es maradéka sosem lesz 6, így a sorozatban nincs négyzetszám.

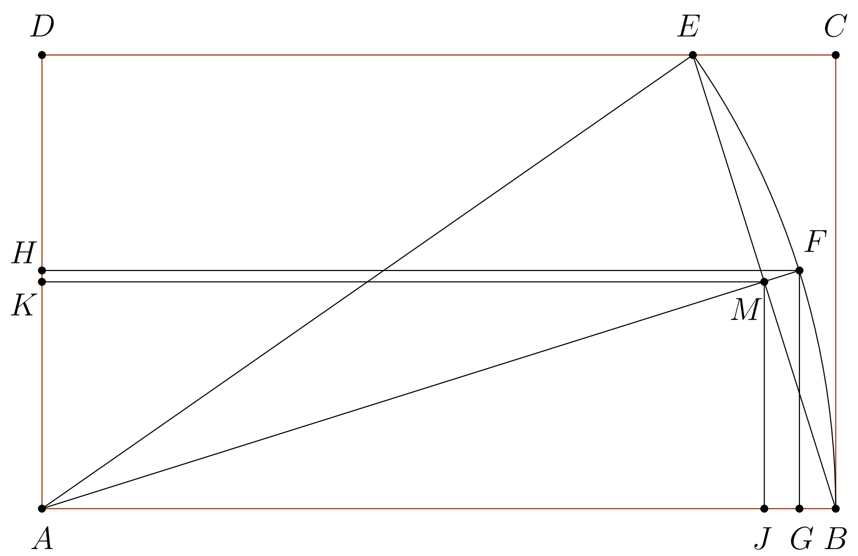
4. **Az $ABCD$ téglalapban $AB = 7$ és $BC = 4$. Az $A$ középpontú $AB$ sugarú kör a $CD$ oldalt $E$-ben metszi. A téglalap belsejében lévő $BE$ körív felezőpontja $F$. Az $F$ pontból $AB$-re, illetve $AD$-re állított merőlegesek talppontjai $G$ és $H$. Mekkora az $AGFH$ téglalap területe?**

*Első megoldás.* Az $AF$ egyenes az $ABE$ egyenlő szárú háromszög szárszögének szögfelezője, ezért súlyvonal is egyben. Legyen $BE$ felezőpontja $M$, ekkor $T_{ABE} = 2 \cdot T_{AMB}$. Az $ABF$ háromszög is egyenlő szárú, az $AB$ és $AF$ szárakhoz tartozó magasságai $FG$ és $BM$, ezek is egyenlők. Így az $AGF$ és $AMB$ háromszögek egybevágóak, mert két oldalban ($AF = AB$, $FG = BM$) és a nagyobbikkal szemközti szögben (derékszög) megegyeznek.

$$T_{AGFH} = 2 \cdot T_{AGF} = 2 \cdot T_{AMB} = T_{ABE}$$

Az $ABE$ háromszög $AB$ oldalhoz tartozó magasságának hossza megegyezik a $BC$ oldal hosszával. Így

$$T_{AGFH} = T_{ABE} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14.$$



*Második megoldás.* (Sok Pitagorasz-tétellel.) Az $AED$ derékszögű háromszögből a $DE$ befogó hossza $\sqrt{49-14}=\sqrt{33}$, így $EC=7-\sqrt{33}$. A $BEC$ derékszögű háromszögből a $BE$ átfogó hossza:

$$BE=\sqrt{(7-\sqrt{33})^2+16}=\sqrt{98-14\sqrt{33}}.$$

Mivel $BM=BE/2$, az eddigiekhez hasonlóan

$$AM=\sqrt{49-BE^2/4}=\sqrt{49-24,5+3,5\sqrt{33}}=\sqrt{24,5+3,5\sqrt{33}}.$$

Az $M$ pontból merőlegest állítunk $AB$-re és $AD$-re: így kapjuk $J$-t és $K$-t. Könnyen látható, hogy $MJ=2$ és $MK=3,5+0.5\sqrt{33}$. Így az $AJMK$ téglalap területe $7+\sqrt{33}$. $AJMK$ és $AGFH$ hasonlóak, a hasonlóság aránya $AF/AM=7/\sqrt{24,5+3,5\sqrt{33}}$, azaz a területek aránya

$$(AF/AM)^2=49/(24,5+3,5\sqrt{33})=98/(49+7\sqrt{33})=14/(7+\sqrt{33}).$$

Így végül a keresett terület: $(7+\sqrt{33})\cdot 14/(7+\sqrt{33})=14$.

## 8. osztály, 1. nap — Országos döntő

1. A sakktáblán pirosra van színezve 3 mező. Szeretnénk elérni, hogy bármely piros mezőről bármely másik piros mezőre el lehessen jutni úgy, hogy csak piros mezőket érintünk, és mindig oldallal szomszédos mezőre lépünk tovább. Mutassuk meg, hogy ehhez legfeljebb 12 további mezőt kell pirosra színezni!

1\. eset: Tegyük fel, hogy a 3 piros mező három különböző oszlopban van. Vegyük azt az oszlopot, amelyik a három mező oszlopa közül a középső, és ebben minden mezőt színezzünk pirosra: ez eddig legfeljebb 7 mező. A másik két mezőtől sétáljunk el vízszintes irányban eddig az oszlopig: az érintett mezőket színezzük pirosra: ez legfeljebb 8-3=5 piros mező. Így legfeljebb 7+5=12 mezőt színeztünk pirosra, és a feladat feltételeit teljesítettük.

2\. eset: a 3 piros mező közül legalább kettő egy oszlopban van. Vegyük azt az oszlopot, amelyikben legalább két piros mező van, és ezt színezzük pirosra: így legfeljebb 6 mezőt színeztünk eddig pirosra. A harmadik piros mező oszlopától sétáljunk el eddig az oszlopig, és az utunk során érintett mezőket színezzük pirosra. Így legfeljebb további 6 mezőt színeztünk pirosra. A kapott legfeljebb 6+6=12 mező teljesíti a feladat feltételeit.

2. Mennyi lehet $p+q$ és $p^2+q^2$ legnagyobb közös osztója, ahol $p$ és $q$ két különböző pozitív prímszám?

*Első megoldás.* Ha az $r$ prímszám osztja a $p+q$ és a $p^2+q^2$ számot, akkor osztja a $(p+q)^2-(p^2+q^2)=2pq$ számot is. A $2pq$ szám prímosztói: 2, $p$ és $q$, így $r$ csak ezek egyike lehet. $p$ és $q$ nem jön szóba, hiszen ha például $p$ osztja $p+q$-t, akkor $q$-t is osztania kéne, ami lehetetlen, hiszen $p$ és $q$ két különböző pozitív prímszám. Így $r$ csak a 2 lehet. A 4 már nem oszthatja $p^2+q^2$-et, hiszen a 4-es maradék vizsgálata alapján ez csak páros $p$ és

$q$ mellett lenne lehetséges, de ekkor $p = q = 2$, amit a feladat szövege kizárt. Tehát a két szám legnagyobb közös osztója csak 1 vagy 2 lehet, és ezekre van is példa: az első esetben pl. $p = 2$ és $q = 3$, a második esetben pedig $p = 3$ és $q = 5$.

*Második megoldás.* Ha $d$ jelöli a legnagyobb közös osztót, akkor $d$ osztja $(p+q)(p-q) = p^2 - q^2$-et is. Ezek szerint $d|(p^2 - q^2) + (p^2 + q^2) = 2p^2$ és $d|(p^2 + q^2) - (p^2 - q^2) = 2q^2$. Mivel $p$ és $q$ különböző pozitív prímek, így $2p^2$ és $2q^2$ legnagyobb közös osztója 2, azaz $d$-nek osztania kell a 2-t, így csak 1 vagy 2 lehet. Az előző megoldásban láttuk, hogy ez a két eset meg is valósul.

3. Igaz-e, hogy 20 egymást követő egész számból mindig kiválasztható 10 úgy, hogy a kiválasztott számok összege relatív prím legyen a nem kiválasztott számok összegéhez?

Igen, igaz. Legyen a 20 egymást követő egész szám $a-9, a-8, \ldots, a, a+1, \ldots, a+10$. Ezek összege $20a + 10$. Célunk az, hogy a két összeg $10a + 3$ és $10a + 7$ legyen. Ez a két szám valóban relatív prím, mert a legnagyobb közös osztójuk osztja a különbségüket, a 4-et is, így csak 1, 2 vagy 4 lehet, de mivel mindkét szám páratlan, így a 2 és a 4 nem lehet közös osztó. Ez a kettéosztás megvalósítható. Az egyik csoport: $a-9, a-8, a-7, a-6, a-5, a+5, a+6, a+8, a+9, a+10$, a másik pedig: $a-4, a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+7$.

4. Két rabló a következő módon osztozkodik a zsákmányolt aranytallérokon: „1 neked, 2 nekem, 3 neked, 4 nekem stb.”, amíg az aranytallérokból futja. A végén a soron következő rabló megkapja a maradék aranytallérokat. Tudjuk, hogy 1000 aranytallérnál kevesebb volt a zsákmányuk, és azt is, hogy az osztozkodás végén mindkét rabló egyforma számú aranytallért kapott. Legfeljebb hány aranytallér lehetett a zsákmány?

*Első megoldás.* Mivel egy lépéspárban a második rabló mindig 1-gyel több tallért kap, $2k$ számú teljes lépés után $k$-val több aranya van. Az utolsó (csonka) lépéspár innen kétféleképp adhat egyenlőséget: vagy az első kap $k$ darabot és ezzel vége, vagy az első kap $2k+1$-et és a második $k+1$-et. Az első esetben

$$1 + 2 + \ldots + 2k + k = \frac{(2k+1)2k}{2} + k = (2k+1)k + k = 2k(k+1)$$

a tallérok száma, a második esetben pedig

$$1+2+\ldots+2k+1+k+1 = \frac{(2k+2)(2k+1)}{2} + k + 1 = (k+1)(2k+1) + k + 1 = 2(k+1)(k+1).$$

A $2k(k+1)$ alakú számokból 1000 alatt a $2 \cdot 21 \cdot 22 = 924$ a legnagyobb, a $2(k+1)(k+1)$ alakúakból pedig a $2 \cdot 22 \cdot 22 = 968$. Tehát legfeljebb 968 tallér lehetett a zsákmány.

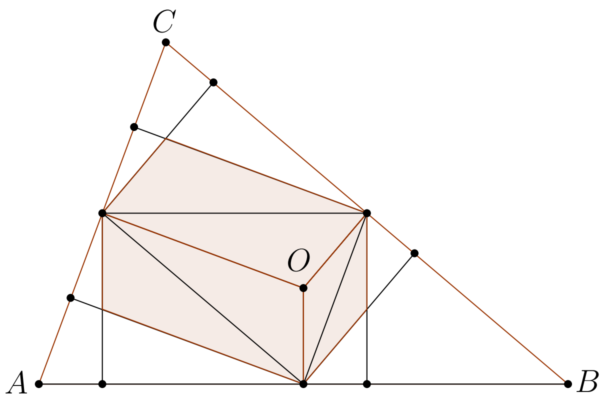
*Második megoldás.* Nevezzük $A$-nak a rablót, aki 1 aranytallért kap, $B$-nek a másikat. Kétféle módon állhat elő a feladatban leírt helyzet: vagy mindkét rabló $n$-szer kap aranytallért, és $A$ kapja a maradékot, vagy $A$ $n$-szer, $B$ $n-1$-szer kap aranytallért, és $B$ kapja a maradékot. Az első esetben $B$ zsákmánya $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$ aranytallér. Ez az eset meg is valósulhat, mert a maradék, ami $A$-nak jut, $2+4+6+\ldots+2n-(1+3+\ldots+2n-1) = n$, ami kevesebb, mint $2n+1$. Ekkor a a zsákmány $2n(n+1)$ aranytallér, melynek legnagyobb lehetséges 1000-nél kisebb értéke a 924 ($n = 21$ esetén). A második esetben $A$ zsákmánya $1 + 3 + \ldots + 2n - 1 = n^2$ aranytallér. A $B$-nek jutó maradék

$1 + 3 + ... + 2n - 1 - (2 + 4 + ... + 2n - 2) = n$, és ez lehetséges, mert kevesebb, mint $2n$. Ekkor a teljes zsákmány $2n^2$, melynek legnagyobb lehetséges 1000-nél kisebb értéke 968 ($n = 22$ esetén). Tehát a feladat kérdésére a válasz: 968 aranytallér.

*Harmadik megoldás a versenyzők dolgozatai alapján.* Nézzük meg, hány teljes körből állhatott az osztozkodás. 43 teljes kör esetén a teljes körök végén az első rabló $1+3+...+43 = 22^2 = 484$ aranyat kapott, a második rabló pedig könnyen látható módon 22-vel kevesebbet, azaz 462 aranyat. Az egyenlőséghez a második rablónak még 22 aranyat kell kapnia, ami lehetséges, mert a teljes kör 44 aranyból állna. Ez összesen 968 arany. Ha legfeljebb 42 teljes kör volt, a kiosztott aranyak száma kevesebb, mint 1+2+...+43=484+462=946. Ha legalább 44 teljes kör volt, akkor a második rabló legalább 2+4+...+44=506 aranyat kapott, és mivel az elsőnek is legalább ennyit kellett kapnia, így összesen 1000-nél több aranyat kaptak, ami kizárt. Így a feladat kérdésére a válasz: 968 aranytallér.

5. Egy hegyesszögű háromszög oldalfelező pontjaiból merőlegeseket állítottunk a másik két oldalra. A 6 merőleges által közrezárt hatszög területe hányadrésze a háromszög területének?

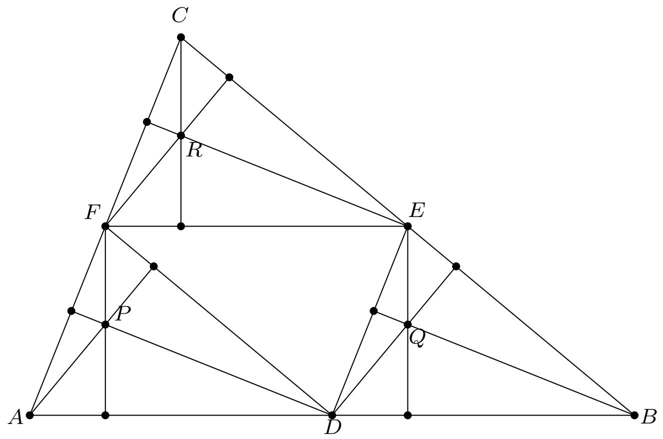
*Első megoldás.* Állítsunk merőlegeseket az oldalfelező pontokból a felezőpontot tartalmazó oldalakra. A kapott három merőleges egy ponton megy át, a háromszög körülírt körének középpontján, melyet jelöljön $O$. Az oldalfelező pontokat kössük össze $O$-val. A kapott három szakasz hatszögünket három parallelogrammára bontja (hiszen mindhárom kapott négyszögnek két-két párhuzamos oldalpárja van). Behúzva a parallelogrammák $O$ pontot nem tartalmazó átlóit azonnal adódik, hogy a hatszög területe duplája az oldalfelező pontok által alkotott háromszögnek. Mivel a középvonalak négy egybevágó háromszögre bontanak egy háromszöget, így az oldalfelező pontok által alkotott háromszög területe negyede az eredeti háromszög területének, tehát a hatszög területe fele az eredeti háromszög területének.




*Második megoldás a versenyzők dolgozatai alapján.* Jelölje $D$, $E$ és $F$ a megfelelő oldalak felezőpontjait. Állítsunk merőlegest az $A$ csúcsból a $DF$ középvonalra. Vegyük észre, hogy ez az egyenes tartalmazza a hatszög ábrán $P$-vel jelölt csúcsát, hiszen ez a $P$ pont az $ADF$ háromszög magasságpontja, mert rajta van a háromszög $D$-ből és $F$-ből induló magasságvonalán. Hasonlóan igazolható, hogy a $R$ és $Q$ az $CEF$ és a $BDE$ háromszög magasságpontja. Az $FRE$ és a $DQB$ háromszög egybevágó, hiszen $FR$ párhuzamos $DQ$-val (mindkettő merőleges $BC$-re), $RE$ párhuzamos $QB$-vel (mindkettő merőleges $AC$-re), és $CE$ és $DB$ párhuzamosak és egyforma hosszúak (a középvonal jól ismert tulajdonsága miatt). Hasonlóan elmondható, hogy az $FPD$ és az $EQB$ háromszög egybevágó. Így tehát a hatszög területe felírható a következőképpen:

$$T_{DEF}+T_{DEQ}+T_{EFR}+T_{FDP} = T_{DEF}+T_{DEQ}+T_{BDQ}+T_{EBQ} = T_{DEF}+T_{EDB} = 2{\cdot}T_{ABC}/4 = T_{ABC}/2.$$

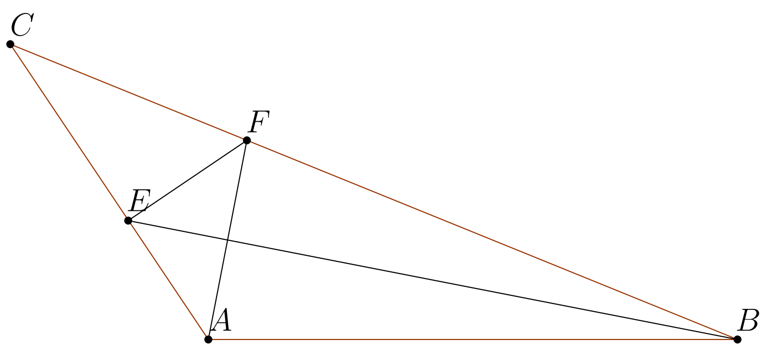
Azaz a hatszög területe a háromszög területének a fele.




8. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. Az $ABC$ háromszögben a $B$ csúcsból induló szögfelező az $AC$ oldalt az $E$ pontban metszi. Tudjuk, hogy a $BEA$ szög nagysága 45°. Vegyük fel a $BC$ oldalon az $F$ pontot úgy, hogy $BF = BA$ legyen. Mekkora az $EFA$ szög nagysága?

Mivel a $AFB$ háromszög egyenlőszárú, így a $B$ csúcsból induló szögfelező egyben felezőmerőlegese is az $AF$ szakasznak. Ez azt jelenti, hogy $FE = AE$. Így az $AFE$ háromszög egyenlő szárú. Az eddigiek alapján $A$ tükörképe a $BE$ egyenesre $F$, így $AEF\sphericalangle = 2 \cdot 45° = 90°$. Így végül $EFA\sphericalangle = (180° - 90°)/2 = 45°$.



2. Egy $8 \times 8$-as sakktáblán a következő játékot játssza két játékos: az első játékos elhelyezi a királyt a tábla egyik mezőjén, majd felváltva lépnek a királlyal (az első lépést a királlyal a második játékos teszi). Olyan mezőre szabad csak lépnie a soron következő játékosnak, ahol a király még nem járt. Az a játékos veszít, aki már nem tud lépni. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája? Adj meg egy nyerő stratégiát! (A királlyal egy lépés során egy él- vagy egy csúcsszomszédos mezőre szabad lépni.)

A második játékosnak van nyerő stratégiája. Osszuk fel a sakktáblát $1 \times 2$-es tégla-lapokra. A második játékos stratégiája a következő: akárhova lép az első játékos (illetve kezdetben helyezi a királyt), ő a mezőt tartalmazó $1 \times 2$-es téglalap másik mezőjére lép. Ez valóban nyerő stratégia: a második játékos minden lépése után igaz az, hogy a kijelölt $1 \times 2$-es téglalapokban vagy mindkét mezőn járt a király, vagy egyiken sem, és így az első játékos csak úgy tud lépni, hogy egy eddig nem érintett téglalapba belép. Így viszont a második játékos mindig tud lépni az első játékos lépése után, és mivel a játék véges sok lépésben véget ér, az első játékos fog elakadni.

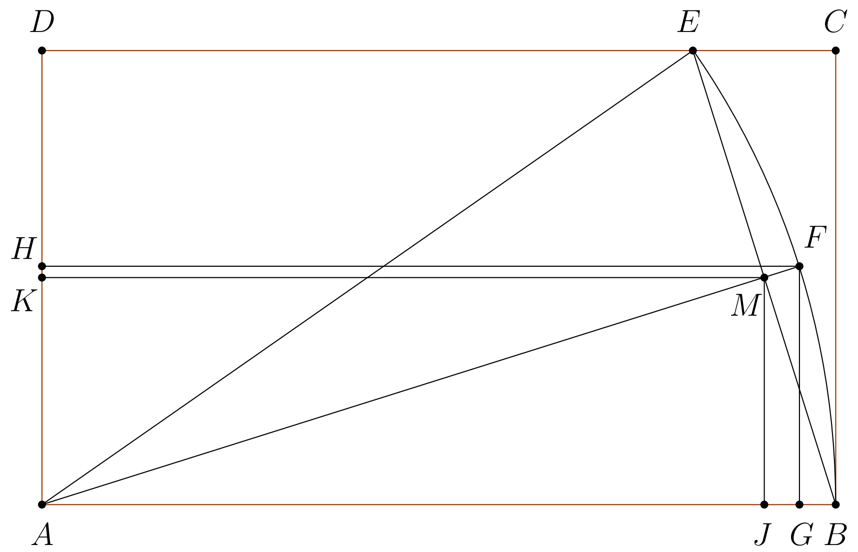
3. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 7$ és $BC = 4$. Az $A$ középpontú $AB$ sugarú kör a $CD$ oldalt $E$-ben metszi. A téglalap belsejében lévő $BE$ körív felezőpontja $F$. Az $F$ pontból $AB$-re, illetve $AD$-re állított merőlegesek talppontjai $G$ és $H$. Mekkora az $AGFH$ téglalap területe?

*Első megoldás.* Az $AF$ egyenes az $ABE$ egyenlő szárú háromszög szárszögének szögfelezője, ezért súlyvonal is egyben. Legyen $BE$ felezőpontja $M$, ekkor $T_{ABE} = 2 \cdot T_{AMB}$. Az $ABF$ háromszög is egyenlő szárú, az $AB$ és $AF$ szárakhoz tartozó magasságai $FG$ és $BM$, ezek is egyenlők. Így az $AGF$ és $AMB$ háromszögek egybevágóak, mert két oldalban ($AF = AB$, $FG = BM$) és a nagyobbikkal szemközti szögben (derékszög) megegyeznek.

$$T_{AGFH} = 2 \cdot T_{AGF} = 2 \cdot T_{AMB} = T_{ABE}$$

Az $ABE$ háromszög $AB$ oldalhoz tartozó magasságának hossza megegyezik a $BC$ oldal hosszával. Így

$$T_{AGFH} = T_{ABE} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14.$$



*Második megoldás.* (Sok Pitagorasz-tétellel.) Az $AED$ derékszögű háromszögből a $DE$ befogó hossza $\sqrt{49-14}=\sqrt{33}$, így $EC=7-\sqrt{33}$. A $BEC$ derékszögű háromszögből a $BE$ átfogó hossza:

$$BE=\sqrt{(7-\sqrt{33})^2+16}=\sqrt{98-14\sqrt{33}}.$$

Mivel $BM=BE/2$, az eddigiekhez hasonlóan

$$AM=\sqrt{49-BE^2/4}=\sqrt{49-24,5+3,5\sqrt{33}}=\sqrt{24,5+3,5\sqrt{33}}.$$

Az $M$ pontból merőlegest állítunk $AB$-re és $AD$-re: így kapjuk $J$-t és $K$-t. Könnyen látható, hogy $MJ=2$ és $MK=3,5+0.5\sqrt{33}$. Így az $AJMK$ téglalap területe $7+\sqrt{33}$. $AJMK$ és $AGFH$ hasonlóak, a hasonlóság aránya $AF/AM=7/\sqrt{24,5+3,5\sqrt{33}}$, azaz a területek aránya

$$(AF/AM)^2=49/(24,5+3,5\sqrt{33})=98/(49+7\sqrt{33})=14/(7+\sqrt{33}).$$

Így végül a keresett terület: $(7+\sqrt{33})\cdot 14/(7+\sqrt{33})=14$.

4. Egy teremben 20 ember van, akik között eddig nem történt kézfogás. A terembe 5 percenként belép egy új ember, és kezet fog pontosan két jelenlévővel. Azonban bármelyik résztvevő a harmadik kézfogása után rögtön elhagyja a termet és többé nem tér vissza. Bizonyítsd be, hogy egy idő után valaki egyedül marad a teremben!

*Első megoldás.* Tegyük fel indirekt módon, hogy senki nem marad egyedül a teremben. Ekkor mindig be tud lépni egy új ember a terembe, tehát az is lehetséges, hogy 60 új ember belép a terembe. Ekkor a kézfogások száma a 60. ember belépése után pontosan 120 (a belépő emberek nézőpontjából számolva). A lépés végén a teremben maradó emberek száma legyen $n$, így eddig $80-n$ ember távozott a teremből. A teremben maradt emberek mindegyike legfeljebb két emberrel fogott kezet, a távozottak mindegyike pedig pontosan hárommal, így a kézfogások száma legfeljebb $(2n+3(80-n))/2=(240-n)/2$. Tehát $120\le(240-n)/2$, azaz $n\le 0$, ami ellentmondás, hiszen az újonnan érkező ember mindig benn marad a teremben. Az ellentmondás igazolja az állítást.

*Második megoldás.* Egy adott helyzetben jelölje $a$ a teremben lévő emberek számát, akik még senkivel nem fogtak kezet, $b$ a teremben lévő emberek számát, akik pontosan egy emberrel fogtak kezet, $c$ pedig a teremben lévő emberek számát, akik pontosan két emberrel fogtak kezet. Egy új ember belépése után az $(a,b,c)$ számhármas a következőképp módosulhat: $(a-2,b+2,c+1)$ (a belépő két nullással fogott kezet), $(a-1,b,c+2)$ (egy nullással és egy egyessel fogott kezet), $(a-1,b+1,c)$ (egy nullással és egy kettessel fogott kezet), $(a,b-2,c+3)$ (két egyessel fogott kezet), $(a,b-1,c+1)$ (egy egyessel és egy kettessel fogott kezet), $(a,b,c-1)$ (két kettessel fogott kezet). Vegyük észre, hogy a $3a+2b+c$ összeg minden esetben eggyel csökken. Kezdetben az összeg 60, így legfeljebb 59 lépés után egy ember fog a teremben maradni (különben lehetne újabb lépést tenni).

*Harmadik megoldás.* (Változat az előzőre) Kezdetben mindenkinél a teremben legyen 3 kavics. Amikor valaki belép, vegyen el azoktól, akikkel kezet fog, egy-egy kavicsot, és egyet dobjon el (így nála egy kavics lesz). Minden lépés után igaz az, hogy aki még nem fogott kezet, annál 3 kavics van, aki egy emberrel fogott kezet, annál 2, aki pedig két emberrel, annál 1. Akinek elfogy a kavicsa, távoznia kell, hiszen már három emberrel fogott kezet.

Mivel minden lépésben eggyel csökken a kavicsok száma, ezért legfeljebb 59 lépésig tart az eljárás. (Sőt, mivel a végén benn maradt ember kezében 1, 2 vagy 3 kavics van, így a lépésszám csak 59, 58 vagy 57 lehet).

*Negyedik megoldás.* Számoljuk meg, hogy az egyes emberek még hányszor foghatnak kezet, mielőtt távozniuk kell, és vegyük ezen számok összegét. Kezdetben ez $20 \cdot 3 = 60$. Amikor belép valaki, akkor az összeg 3-mal nő, a két kézfogás eredményeképpen viszont (minden kézfogás mindkét résztvevőtől egy lehetőséget vesz el) 4-gyel csökken. Így egy ember belépése és kézfogásai után az összeg 1-gyel csökken. Ez a folyamat mindaddig ismétlődik, amíg van legalább két ember a teremben (hiszen velük megtörténhet a két kézfogás). Az 59. belépő kézfogásai után viszont az összeg 1, így ekkor már csak egyetlen ember lehet a teremben (hiszen akinek nincs több lehetősége a kézfogásra, annak távoznia kellett).

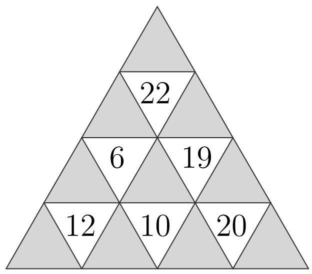
# XLV. verseny 2015–2016.

# Feladatok

**5. osztály** — **Megyei forduló**

1. – Többet eszel, mint én! – mondta méltatlankodva Hernyó Álteknőcnek.
   – Nem is igaz! – válaszolta felháborodva Álteknőc.
   – Mindketten tévedtek – csitította őket Alice, hangjában enyhe szemrehányással.
   Mire Fehér Nyúl a világ legszelídebb hangján fűzte véleményét az elhangzottakhoz:
   – Mindnyájatoknak igaza van.
   A négy állítás közül hány igaz?

2. Írjuk be 1-től 10-ig a számokat a szürke háromszögekbe úgy, hogy minden fehér háromszögben a vele oldallal szomszédos háromszögekbe írt számok összege szerepeljen.



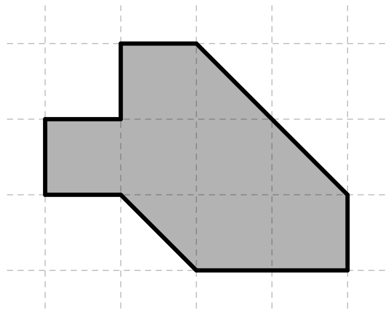

3. Osszuk fel az itt látható alakzatot

   a) 3

   b) 5

   c) 15

   egybevágó (tükrözést is megengedve egymással fedésbe hozható) részre.



4. 2016 darab szomszédos egész számot összeadva különböző összegeket kaphatunk. Ezek közül az összegek közül melyik áll legközelebb a 0-hoz?

5. Van sok egyforma $4 \times 9$-es téglalapunk. Ezekből nagyobb téglalapokat szeretnénk hézagmentesen, a kisebb téglalapok átfedése nélkül összerakni. Sikerülhet-e ez, ha a nagy téglalap oldalai

   a) $20 \times 71$;

   b) $19 \times 72$;

   c) $21 \times 72$?

6. osztály

Megyei forduló

1. Az $1, 2, 3, \ldots, 9$ számokat hányféleképpen lehet úgy sorbarendezni, hogy nem állhat egymás mellett két páratlan szám?
(Az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ tehát egy megfelelő sorozat, míg a $3, 2, 1, 4, 5, 7, 6, 8, 9$ nem, hiszen az 5 és a 7 szomszédosak.)

2. Egy négyjegyű pozitív egész számról a következőket tudjuk:
1) Minden számjegye különböző.
2) Számjegyeinek összege megegyezik 2016 számjegyeinek összegével.
3) Számjegyeinek szorzata megegyezik 2016 számjegyeinek szorzatával.
Melyik a

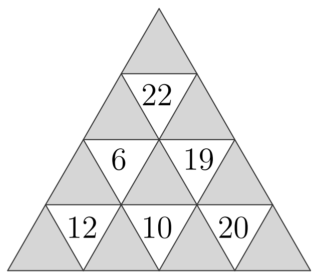
   a) legkisebb

   b) legnagyobb

   ilyen szám?

3. a) Írjuk be 1-től 10-ig a számokat a szürke háromszögekbe úgy, hogy minden fehér háromszögben a vele oldallal szomszédos háromszögekbe írt számok összege szerepeljen!

   b) Lehet-e találni két kitöltést, amelyekben a középső háromszögbe írt szám különbözik?



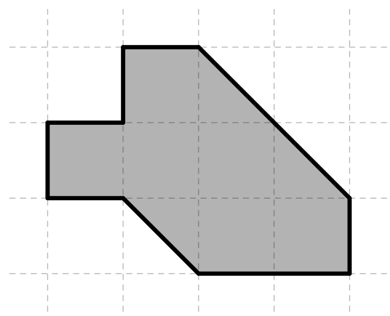

4. Osszuk fel az itt látható alakzatot

   a) 3

   b) 5

   c) 15

   egybevágó (tükrözést is megengedve egymással fedésbe hozható) részre!



5. A király leghűségesebb szolgálójának a következő ajánlatot teszi:
„Ebben a ládában 2016 aranytallér van. Minden nap két lehetőség közül választhatsz.
1) Ha a ládában páros számú aranytallér van, elveheted az aranytalléroknak pontosan a felét.
2) Visszatehetsz a ládába pontosan 10 aranytallért az addig megszerzett aranyakból.
Rajtad kívül más nem fog sem betenni, sem kivenni aranyat. Ezt addig folytathatod, ameddig csak szeretnéd.”
Legfeljebb hány tallér jutalmat szerezhet így a ládából a szolgáló, és hogyan tudja ezt elérni?

7. osztály — Megyei forduló

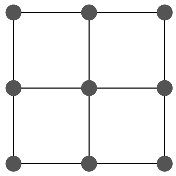
1. 20 teljesen azonos golyó belsejében elhelyeztük a pozitív egész számokat 1-től 20-ig, majd a golyókat egy dobozba tettük. Ezt követően egyesével elkezdjük kihúzni a golyókat és azonnal megállunk, ha az addig kihúzott golyókban lévő számok

   a) szorzata

   b) összege

   páros. Mindkét esetben add meg, hogy mi az a legkisebb szám, ahány húzásnál több biztosan nem történhetett.

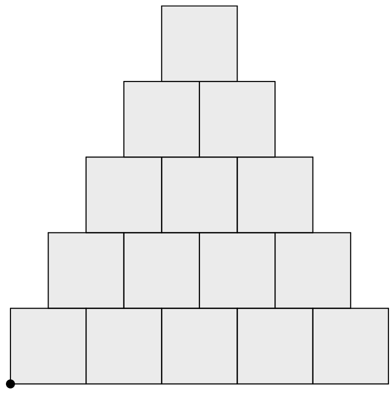
2. Az ábrán látható négyzetrács 9 rácspontja közül legfeljebb hányat színezhetünk pirosra, hogy ne legyen olyan téglalap, amelynek mind a négy csúcsa piros?



3. Gondoltunk egy háromjegyű számra. Tudjuk, hogy az alábbi 7 állítás nem mind igaz, de az egymást követő állítások közül legalább az egyik igaz.
   A) A szám osztható 7-tel.
   B) A szám osztható 11-gyel.
   C) A szám osztható 13-mal.
   D) A szám osztható 77-tel.
   E) A szám osztható 91-gyel.
   F) A szám osztható 143-mal.
   G) A szám utolsó számjegye 5.
   Mi lehet a gondolt szám?

4. Van rengeteg $1 \times 1$-es és rengeteg $9 \times 9$-es négyzetünk. Ki lehet-e választani közülük 2222 darabot úgy, hogy össze lehessen belőlük állítani egy nagyobb négyzetet?

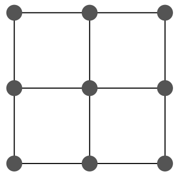
5. Az ábrán látható alakzatot négyzetekből állítottuk össze. Határozd meg azt az egyenest, amely áthalad az alakzat bal alsó csúcsán (az ábrán feketével jelölve), és felezi az alakzat területét. Válaszodat indokold!



8. osztály

Megyei forduló

1. Egy $2 \times 2$-es négyzetrács $3 \times 3$ rácspontja közül legfeljebb hányat színezhetünk pirosra, hogy ne legyen olyan téglalap, amelynek mind a négy csúcsa piros?



2. Van rengeteg $1 \times 1$-es és rengeteg $9 \times 9$-es négyzetünk. Ki lehet-e választani közülük 2222 darabot úgy, hogy össze lehessen belőlük állítani egy nagyobb négyzetet?

3. Keressük meg azokat az $\overline{abcd}$ négyjegyű és $\overline{xyz}$ háromjegyű számokat, amelyekre a következők igazak: $\overline{abcd} = 70 \cdot \overline{xyz}$, $x = a - b$, $y = b - c$, $z = c - d$.

4. A király leghűségesebb szolgálójának a következő ajánlatot teszi:
,,Ebben a ládában 2016 aranytallér van. Minden nap két lehetőség közül választhatsz.
1) Ha a ládában páros számú aranytallér van, elveheted az aranytalléroknak pontosan felét.
2) Visszatehetsz a ládába pontosan 77 aranytallért az addig megszerzett aranyakból.
Rajtad kívül más nem fog sem betenni, sem kivenni aranyat. Ezt addig folytathatod, ameddig csak szeretnéd.”
Legfeljebb hány tallér jutalmat szerezhet így a ládából a szolgáló, és hogyan tudja ezt elérni?

5. Adott két egyenlő sugarú kör, melyek egymást az $A$ és a $B$ pontban metszik. Felveszünk egy $P$ pontot az $AB$ szakasz $B$-n túli meghosszabbításán. A $P$ pontból érintőt húzunk a két körhöz úgy, hogy az érintési pontok, $X$ és $Y$ az $AB$ egyenesének ugyanarra az oldalára essenek. Tudjuk, hogy a rövidebb $\overset{\frown}{XB}$ és a rövidebb $\overset{\frown}{BY}$ körív együtt egy negyedkörívet tesz ki. Mekkora szöget zár be az $XY$ és az $AB$ egyenes?

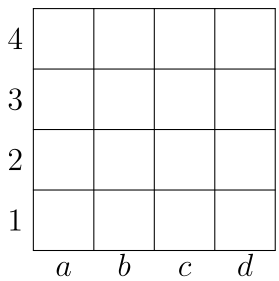
5. osztály, 1. nap

Országos döntő

1. Az összes háromjegyű számot felírtuk egy-egy kártyára, és ezeket mind beledobtuk egy zsákba. Hányat kell kihúznunk a zsákból bekötött szemmel, hogy a kihúzottak között biztosan legyen kettő olyan, melyekben a jegyek összege megegyezik?

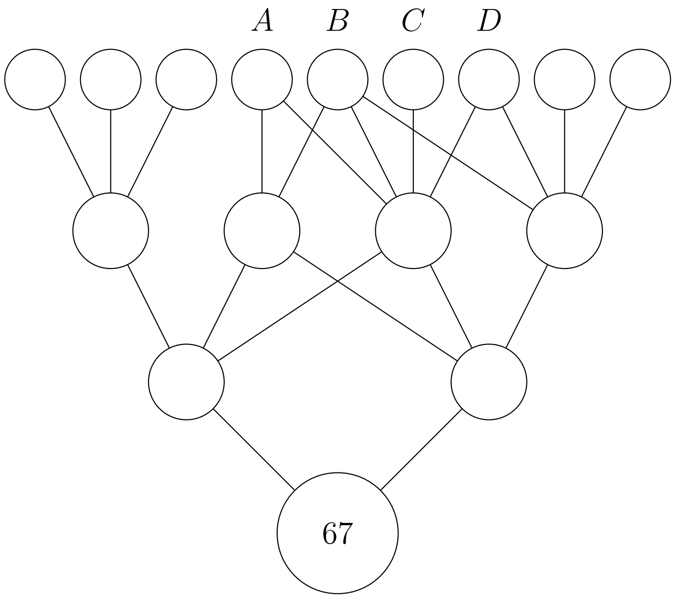
2. Egy kártyapakli lapjain 4 féle figura lehet: egy kutya, egy kutyaház, egy labda és a kutyán nyakörv. Mindegyik lapon van kutya, viszont a többi figura vagy van, vagy nincs a lapokon. Nyakörvből és labdából többféle is akad, míg kutya és kutyaház csak egyféle van. Egy-egy kártyán akár mind a 4 figura is ott lehet. A pakliban nincs két egyforma lap. Tudjuk még a következőket is:
(1) Egy olyan lap van, amin csak kutyus található.
(2) Olyan, amelyiken nincs kutyaház, és labda sincs, 3 db van.
(3) Se kutyaház, se nyakörv nincs 4 lapon.
(4) 12 lapon van kutyaház.
(5) Nincs kutyaháza, de van nyakörve 8 kutyusnak.
Hány lapos a kártyapakli?

3. Egy $4 \times 4$-es táblán helyezz el 4 korongot úgy, hogy a sorok, oszlopok, valamint a négyzet két átlójának egyikében se legyen egynél több korong! Hány különböző megoldás van, ha a forgatással egymásra vihetőket egyformának tekintjük?




4. Egy matekverseny második fordulójába 340 gyerek jutott be. A fiúk számának 2/3 része egyenlő a lányok számának 3/4 részével. Hány lány jutott a második fordulóba?

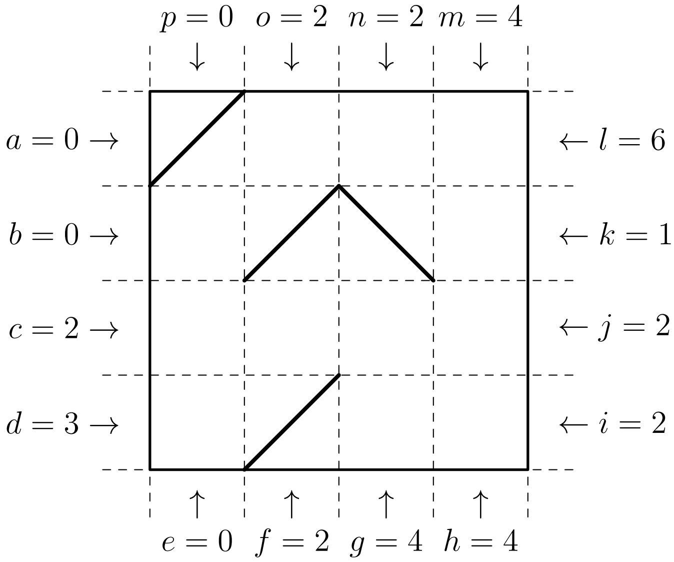
5. Helyezd el az 1, 2, 3 ... 9 számokat a legfelső sorban lévő körökbe. Minden további körbe az a szám kerül, amelyik a fölötte szereplők összege, de csak azoké, amelyekkel vonal köti össze. A legalsó összeg 67.
a) Töltsd ki az ábrát!
b) Hány megoldás lehetséges az $A, B, C, D$ körök kitöltésére?

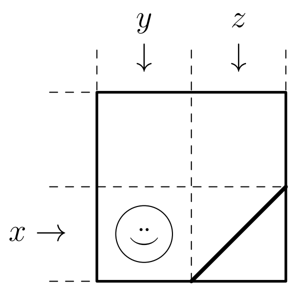

A
B
C
D
67

5. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. Választottam 3 különböző pozitív számjegyet, leírtam az összes olyan háromjegyű számot, ami ebből a 3 számjegyből készíthető, majd összeadtam a leírt háromjegyűeket. Az összeg 1776. Mi lehetett a 3 számjegy?

2. Peti egy Kísértettanya nevű feladványt talált egy rejtvényújságban: egy $4 \times 4$-es táblázat egyes mezőiben átlósan elhelyezett tükrök vannak. Ezek mindkét oldalukon tükröződnek. A táblázat szabadon maradt mezőibe egy-egy lakót kell beköltöztetni úgy, hogy ha a táblázat valamelyik sorába, vagy oszlopába betekintünk, akkor épp annyi lakót lássunk, amennyit az odaírt szám jelöl. A nehézséget a lakók jelentik: 4 ember – ők láthatók, és tükörképük is látható, azaz tükröződnek; 4 kísértet – ők nem láthatók, viszont tükröződnek, 4 vámpír – ők láthatók, de nem tükröződnek. Petinek sikerült megoldani feladatot. Neked sikerül?



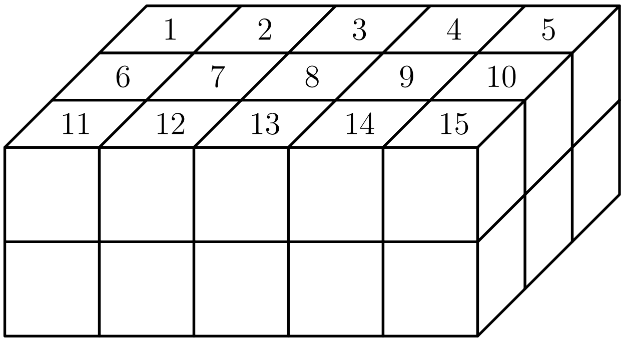




(Ha a jobb oldali rajzon látható mosolygós arc egy ember, akkor az $x$, $y$ és $z$ irányokból is látszik. Ha kísértet, akkor csak a $z$ irányból, ha vámpír, akkor viszont csak $x$ és $y$ irányból látszik.)

3. Felírtuk egy táblára a (pozitív egész) számokat 1-től 2016-ig. Egy lépésben valamelyik kettőt letöröltük, és **mindkettő helyett** felírtuk a két szám különbségeként kapható **nemnegatív** számot. Ezt a lépést néhányszor megismételtük, aminek következtében a táblán ugyanaz a szám szerepelt 2016-szor.
Elérhető-e, hogy ez a szám
a) 3
b) 17
legyen?

4. Építettünk egy téglatestet egységkockákból, melyben az egy csúcsba futó élek hossza 2, 3, 5 egység. Egyesével elvehetsz kockákat úgy, hogy minden lépésben a kapott test felszíne változatlan marad. (Az elvétel során ügyelj arra, hogy a test „egyben” maradjon, azaz ha a teljes lappal egymáshoz csatlakozó kockákat összeragasztanánk, akkor az építményt egy kockánál fogva fel lehet emelni.)
a) Vegyél el minél több egységkockát!

b) Mennyi az elvehető egységkockák maximális száma?
(A kockákat a leírás megkönnyítése érdekében megszámoztuk az ábra szerint. Az alsó réteg kockáinak sorszáma mindig 15-tel nagyobb, mint a felette lévő kockáé.)




6. osztály, 1. nap — Országos döntő

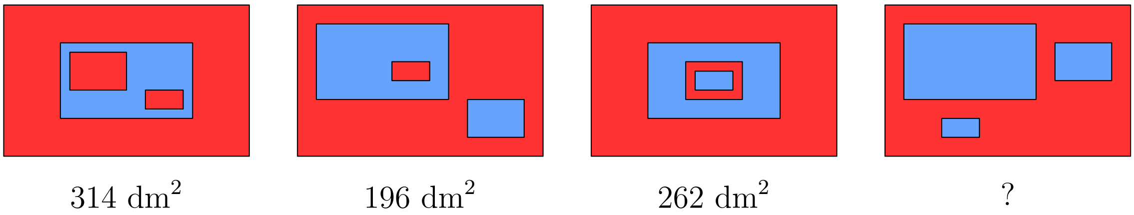
1. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelynek utolsó számjegye nagyobb, mint az első számjegye?

2. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyikét pontosan egyszer felhasználva felírtunk öt pozitív egész számot. Hány négyzetszám lehet ezek között? Adj minden lehetőségre példát! (Négyzetszámnak nevezzük azokat az egész számokat, amelyek megkaphatók egy egész szám önmagával vett szorzataként.)

3. Egy dominókészlet köveinek egyik oldala egy vonallal két részre van osztva. Az egyes részek mindegyikén 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 pötty lehet. A készlet a lehető legtöbb dominót tartalmazza úgy, hogy nincs közöttük két egyforma. (Két dominó egyforma, ha egymás alá helyezhetők úgy, hogy a választóvonalak egy egyenesbe esnek és az egymás alatti részek azonos számú pöttyöt tartalmaznak.)
a) Hány dominóból áll a készlet?
b) Mutasd meg, hogy nem lehet az összes dominót egymás mellé helyezni egy sorba úgy, hogy a szomszédos dominók érintkező részein azonos számú pötty legyen!

4. Peti rajzolt egy ötszöget. Ezután meghatározta az oldalak és az átlók hosszát. Lehetséges-e, hogy ezekre pontosan négy különböző értéket kapott úgy, hogy az egyik érték egyszer, a másik kétszer, a harmadik háromszor, a negyedik négyszer fordult elő?

5. Négy különböző méretű, téglalap alakú szőnyegünk van. A szőnyegek egyik oldala piros, a másik kék. Egymásra helyeztük a szőnyegeket négy különböző elrendezésben (ld. ábra). Az első három esetben meghatároztuk, hogy mekkora piros területet látunk. Határozd meg a látható piros terület nagyságát a negyedik elrendezésnél!




## 6. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. Egy négyjegyű pozitív egész szám minden számjegye különböző. Azt is tudjuk, hogy ha az első számjegyet elhagyjuk, akkor egy 9-cel osztható, ha a másodikat, akkor egy 2-vel osztható, ha a harmadikat, akkor egy 5-tel osztható, ha a negyediket, akkor egy 4-gyel osztható háromjegyű számot kapunk. Hány ilyen négyjegyű szám van?

2. Van 6 egyformán kinéző súlyunk, amelyek 1, 2, 3, 4, 5, 6 dekásak, és van 6 feliratunk ugyanezen értékekkel. Minden súlyra rákerült egy felirat, és tudjuk, hogy legalább 4 súlyra a helyes érték került. Hogyan lehet eldönteni egy kétkarú mérleg segítségével, két méréssel, hogy mind a 6 súlyra helyes felirat került-e?
(Egy mérés a következőt jelenti: a két serpenyőbe tetszőlegesen súlyokat helyezünk, majd leolvassuk, hogy az egyik serpenyőbe kisebb, nagyobb vagy ugyanakkora tömeget helyeztünk-e, mint a másikba.)

3. Felírtuk egy táblára a (pozitív egész) számokat 1-től 2016-ig. Egy lépésben valamelyik kettőt letöröltük, és **mindkettő helyett** felírtuk a két szám különbségeként kapható **nemnegatív** számot. Ezt a lépést néhányszor megismételtük, aminek következtében a táblán ugyanaz a szám szerepelt 2016-szor.
Add meg ennek a számnak az összes lehetséges értékét!

4. Egy pozitív egész számot szépnek nevezünk, ha a 2, 3, 5, 7 számjegyek mindegyikét tartalmazza legalább egyszer, más számjegyet azonban nem. Egy szép számot csodaszépnek mondunk, ha a 7-szerese is szép szám.
a) Mutasd meg, hogy végtelen sok csodaszép szám van.
b) Mutasd meg, hogy egy csodaszép számban csak egy 7-es számjegy lehet.

## 7. osztály, 1. nap — Országos döntő

1. Sárkányországban minden sárkánynak legalább 3 feje van. Azok a sárkányok, amelyeknek páratlan sok fejük van, mindig igazat mondanak, amelyeknek páros sok, mindig hazudnak. Négy sárkány éppen bridzselt, amikor megkérdezték őket, hogy négyüknek összesen hány fejük van. A következő válaszok érkeztek: 14, 15, 16, 20. Hány feje van összesen az igazmondó sárkányoknak? Add meg az összes lehetőséget!

2. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyikét pontosan egyszer felhasználva felírtunk öt pozitív egész számot. Hány négyzetszám lehet ezek között? Adj minden lehetőségre példát! (Négyzetszámnak nevezzük azokat az egész számokat, amelyek megkaphatók egy egész szám önmagával vett szorzataként.)

3. Az $a, b, c, d$ pozitív valós számokról a következőket tudjuk:
(1) $a : (b : c : d) = 72$
(2) $a : (b : c) : d = 8$
(3) $a : b : (c : d) = 4{,}5$.
Mennyi lehet $a : b : c : d$ értéke?

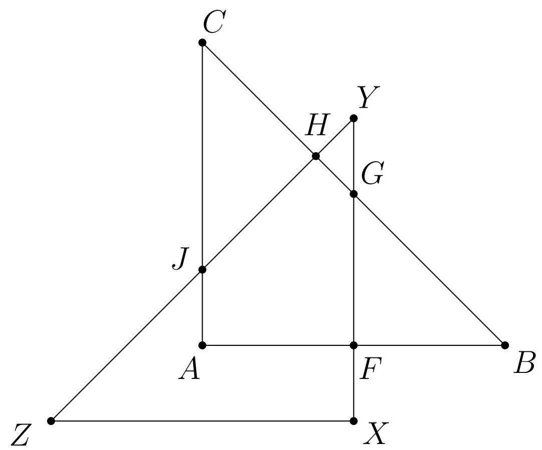
4. Egy kör mentén elhelyeztünk néhány pozitív egész számot. Tudjuk, hogy bármely két szomszédos szám közül az egyik osztója a másiknak, ugyanakkor a nem szomszédos számpárok egyike sem áll osztó-többszörös viszonyban. Lehetséges-e, hogy a körön elhelyezett számok száma 20?

5. Peti rajzolt egy ötszöget. Ezután meghatározta az oldalak és az átlók hosszát. Lehetséges-e, hogy ezekre pontosan négy különböző értéket kapott úgy, hogy az egyik érték egyszer, a másik kétszer, a harmadik háromszor, a negyedik négyszer fordult elő?

## 7. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. Egy négyjegyű pozitív egész szám minden számjegye különböző. Azt is tudjuk, hogy ha az első számjegyet elhagyjuk, akkor egy 9-cel osztható, ha a másodikat, akkor egy 2-vel osztható, ha a harmadikat, akkor egy 5-tel osztható, ha a negyediket, akkor egy 4-gyel osztható háromjegyű számot kapunk. Hány ilyen négyjegyű szám van?

2. Egy 4 cm oldalú négyzetet kettévágtunk az átlója mentén, majd a kapott $ABC$ és $XYZ$ háromszögeket az ábra szerint helyeztük el. Az $AB$ és $XZ$ szakaszok párhuzamosak, $F$ pedig éppen az $AB$ szakasz felezőpontja. Tudjuk, hogy a $CHJ$ háromszög területe 3 cm$^2$-rel nagyobb a $GHY$ háromszög területénél. Milyen hosszú az $FX$ szakasz?



3. Egy $n \times n$-es négyzetrács bal felső sarokmezője fekete, a többi fehér. Minden lépésben kiválaszthatunk egy olyan fehér mezőt, amelynek páratlan számú fekete oldalszomszédja van, és beszínezhetjük feketére. Elérhető-e ilyen lépésekkel, hogy minden mező fekete legyen, ha

   a) $n = 7$?

   b) $n = 8$?

4. Van-e olyan 2016 oldalú sokszög, amelynek bármely két oldalegyenese metszi egymást, és minden metszéspont a sokszög belsejében vagy határán található?

## 8. osztály, 1. nap — Országos döntő

1. Sárkányországban minden sárkánynak legalább 3 feje van. Azok a sárkányok, amelyeknek páratlan sok fejük van, mindig igazat mondanak, amelyeknek páros sok, mindig hazudnak. Négy sárkány éppen bridzselt, amikor megkérdezték őket, hogy négyüknek összesen hány fejük van. A következő válaszok érkeztek: 14, 15, 16, 20. Hány feje van összesen az igazmondó sárkányoknak? Add meg az összes lehetőséget!

2. Egy kör mentén elhelyeztünk $n$ darab pozitív egész számot úgy, hogy bármely két szomszédos szám közül az egyik osztója a másiknak, ugyanakkor a nem szomszédos számpárok egyike sem áll osztó-többszörös viszonyban.
   Döntsük el, hogy a $3 \leq n \leq 20$ számok közül melyekre lehetséges ez.

3. Az $ABC$ háromszög oldalait a beírt köre az $A_1$, $B_1$, $C_1$ pontokban érinti (az $A_1$ pont a $BC$, a $B_1$ pont az $AC$, a $C_1$ pont az $AB$ oldalán található). Bizonyítsd be, hogy ha $AA_1 = BB_1 = CC_1$, akkor a háromszög szabályos.

4. Egy számból kivonjuk a számjegyeinek összegét. Hányféle különböző számot kapunk, ha az előző eljárást végrehajtjuk az összes háromjegyű számon?

5. Keresd meg az összes olyan (végtelen) számtani sorozatot, amely teljesíti a következő feltételeket:
   (i) a sorozat tagjai pozitív egész számok,
   (ii) a sorozat minden tagja nagyobb, mint az őt megelőző tagok,
   (iii) ha egy szám tagja a sorozatnak, akkor a számjegyeinek összege is tagja a sorozatnak.
   (Egy számtani sorozatban bármely két egymást követő tag különbsége állandó.)

**8. osztály, 2. nap** **Országos döntő**

1. Három egymást követő háromjegyű számot (az eredeti sorrendjükben) egymás után írunk, így egy kilencjegyű számot kapunk. Igaz-e, hogy az így kapott szám mindig osztható 3-mal?

2. Egy $8 \times 8$-as pontrács pontjait két játékos felváltva köti össze szakaszokkal. Két szakasznak nem lehet közös pontja. (A végpontjuk sem lehet közös.) Aki nem tud lépni, veszít. Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája? Ha igen, adj is meg egy nyerő stratégiát.

3. Egy $n \times n$-es négyzetrács bal felső sarokmezője fekete, a többi fehér. Minden lépésben kiválaszt-hatunk egy olyan fehér mezőt, amelynek páratlan számú fekete oldalszomszédja van, és beszínez-hetjük feketére. Elérhető-e ilyen lépésekkel, hogy minden mező fekete legyen, ha
   a) $n = 7$
   b) $n = 8$?

4. A hegyesszögű $ABC$ háromszög magasságpontja $M$, köréírt körének középpontja $O$, a $BC$ oldal felezőpontja $F$ és az $A$ csúcsból induló magasság talppontja $T$. Tudjuk, hogy $MOFT$ egy egységnyi oldalú négyzet. Mekkora a háromszög területe? (A háromszög magasságpontjának nevezzük a magasságvonalak metszéspontját.)

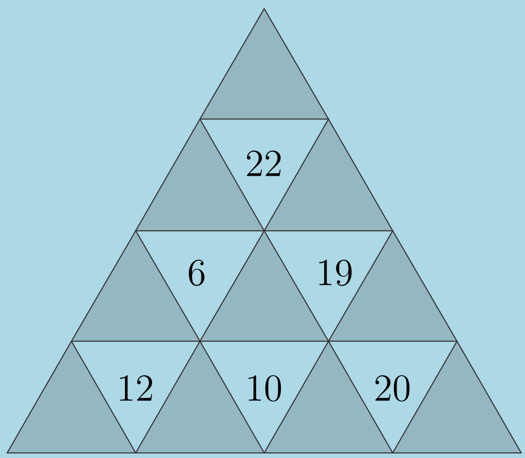
# Megoldások

**5. osztály** **Megyei forduló**

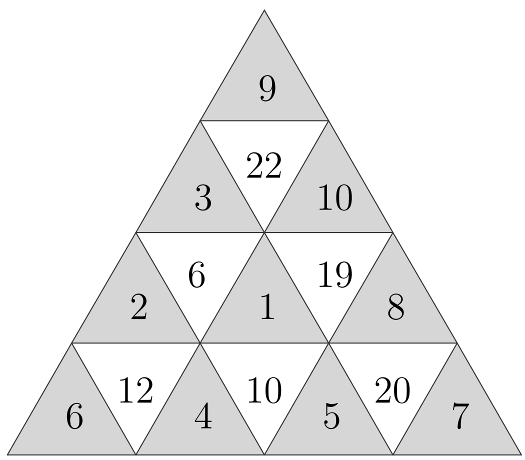
1. – Többet eszel, mint én! – mondta méltatlankodva Hernyó Álteknőcnek.
– Nem is igaz! – válaszolta felháborodva Álteknőc.
– Mindketten tévedtek – csitította őket Alice, hangjában enyhe szemrehányással.
Mire Fehér Nyúl a világ legszelídebb hangján fűzte véleményét az elhangzottakhoz:
– Mindnyájatoknak igaza van.
A négy állítás közül hány igaz?

Hernyó és Álteknőc állítása ellentmond egymásnak, e két állítás egyike igaz, a másik hamis. Így Alice állítása nem lehet igaz, mert mindkét állítást hamisnak mondja.
Fehér Nyúlé sem lehet igaz, mert ő igaznak mondja a két ellentmondó állítást. Az első két állítás közül az egyik igaz, az összes többi állítás hamis. Vagyis 1 igaz állítás van.

2. Írjuk be 1-től 10-ig a számokat a szürke háromszögekbe úgy, hogy minden fehér háromszögben a vele oldallal szomszédos háromszögekbe írt számok összege szerepeljen.

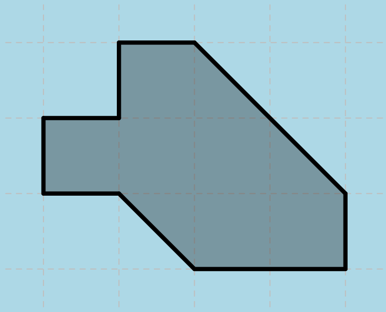



Az egyetlen helyes kitöltés:

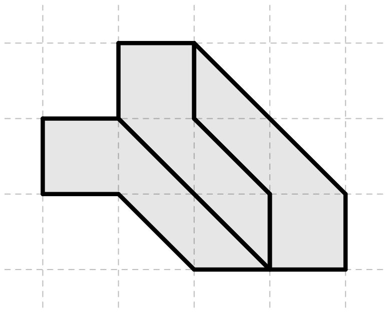


3. Osszuk fel az itt látható alakzatot
   a) 3
   b) 5
   c) 15

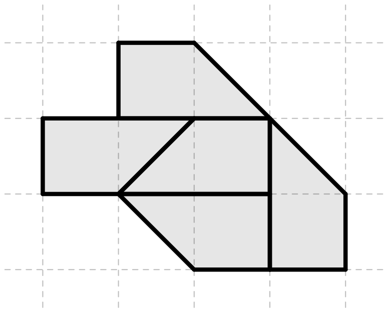
egybevágó (tükrözést is megengedve egymással fedésbe hozható) részre.



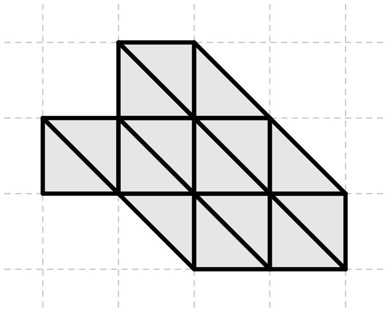
3 egybevágó részre az alábbi módon bonthatjuk fel az alakzatot:



5 egybevágó részre az alábbi módon bonthatjuk fel az alakzatot:



15 egybevágó részre az alábbi módon bonthatjuk fel az alakzatot:



*Megjegyzés.* Mind a 3 részfeladatra egyéb megfelelő megoldások is léteznek.

4. 2016 darab szomszédos egész számot összeadva különböző összegeket kaphatunk. Ezek közül az összegek közül melyik áll legközelebb a 0-hoz?

0 csak páratlan darabszámú szomszédos egész összegeként áll elő úgy, hogy középen a 0 áll, és minden szám az ellentettjével együtt szerepel az összegben. $2016 : 2 = 1008$. $-1007$-től $+1007$-ig 2015 db szomszédos egész van, ezek összege 0. Ha az 1008-at, vagy a $-1008$-at az összeghez vesszük, 2016 db szomszédos számunk van, s ezek összege 1008, vagy $-1008$, melyek egyenlő távolságra vannak a 0-tól. Ha a számsort a negatív irányban ,,toljuk el”, az összeg -1008-nál kisebb lesz, ha pozitív irányban, akkor 1008-nál nagyobb lesz. (Ez azért igaz, mert az első esetben pozitív számo(ka)t kihagyunk az összegből, negatíva(ka)t pedig hozzáteszünk, a másodikban pedig fordítva.) A 0-hoz legközelebbi összeg 1008, vagy $-1008$.

5. Van sok egyforma $4 \times 9$-es téglalapunk. Ezekből nagyobb téglalapokat szeretnénk hézagmentesen, a kisebb téglalapok átfedése nélkül összerakni. Sikerülhet-e ez, ha a nagy téglalap oldalai

a) $20 \times 71$;

b) $19 \times 72$;

c) $21 \times 72$?

a) A kis téglalapok területe $4 \cdot 9 = 36$ egység. A nagy téglalap területe $20 \cdot 71 = 1420$, ami nem osztható 36-tal, ezért ez a téglalap nem rakható ki.

b) A 19 egységnyi oldalt nem lehet kirakni 4 és 9 hosszú oldalak segítségével, mert $19 = 2 \cdot 9 + 1 = 1 \cdot 9 + 10 = 0 \cdot 9 + 19$ és tudjuk, hogy legfeljebb két 9 hosszú oldalt használhatunk. Mivel a maradék egyik esetben sem osztható 4-gyel, ezért ez a téglalap sem rakható ki.

c) Osszuk fel a $21 \times 72$-es téglalapot két téglalapra. Legyenek ezek $12 \times 72$-es, illetve $9 \times 72$-es méretűek. Az előbbi kirakható $3 \times 8$ kis téglalappal, a második pedig 18 téglalappal.

*Megjegyzés.* A c) résznél egyéb kirakás is lehetséges.

## 6. osztály — Megyei forduló

1. Az $1, 2, 3, \ldots, 9$ számokat hányféleképpen lehet úgy sorbarendezni, hogy nem állhat egymás mellett két páratlan szám?
(Az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ tehát egy megfelelő sorozat, míg a $3, 2, 1, 4, 5, 7, 6, 8, 9$ nem, hiszen az 5 és a 7 szomszédosak.)

Mivel 9 szám van és ebből 5 páratlan, amik nem állhatnak egymás mellett, ezért feltétlenül *páratlan, páros, páratlan, páros, páratlan, páros, páratlan, páros, páratlan* sorrendben kell állniuk a számoknak. Mivel más feltétel nincs, így minden olyan sorrend megfelelő, amelyben így állnak a számok.
A 4 páros számot a 4 helyre $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féleképpen helyezhetjük el. Hasonlóan az 5

helyre az 5 páratlan számot: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$-féleképpen. Mivel a páratlanok és a párosak elhelyezése független egymástól, ezért összesen $24 \cdot 120 = 2880$ megfelelő elhelyezés van.

2. Egy négyjegyű pozitív egész számról a következőket tudjuk:
1) Minden számjegye különböző.
2) Számjegyeinek összege megegyezik 2016 számjegyeinek összegével.
3) Számjegyeinek szorzata megegyezik 2016 számjegyeinek szorzatával.
Melyik a

a) legkisebb

b) legnagyobb

ilyen szám?

Mivel a keresett számok számjegyeinek a szorzata 0, és minden számjegyük különböző, így mindkét számban pontosan egy 0 számjegynek kell szerepelnie.

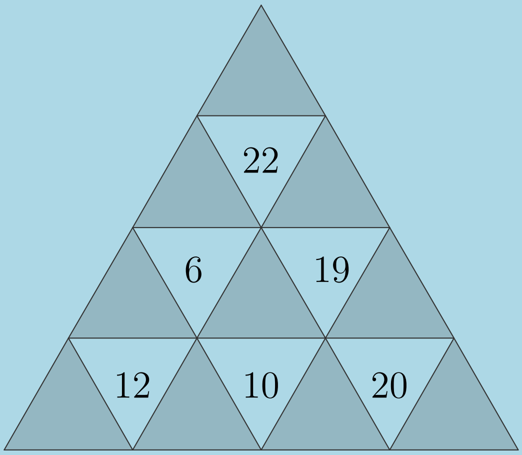
a) Mivel négyjegyű számról van szó, ezért az első számjegy nem lehet 0, és minél kisebb az első számjegy, annál kisebb a szám, ezért válasszuk az első számjegyet 1-nek. Ezen belül minél kisebb a második számjegy, annál kisebb a szám, és a második számjegy már lehet 0, így válasszuk ezt. Mivel a számjegyek összege 9 $(2+0+1+6)$, ezért a harmadik és negyedik számjegy összegének 8-nak kell lennie. Minél kisebb a harmadik számjegy, annál kisebb a szám. Mivel az első számjegy 1, így a legkisebb szóba jövő harmadik számjegy a 2. Vagyis a keresett szám az 1026.

b) Minél nagyobb egy négyjegyű szám első számjegye, annál nagyobb a szám. Válasszuk tehát az első számjegyet a lehető legnagyobbra. Mivel a számjegyek mind különbözőek, a három legkisebb számjegy összege legalább 0+1+2=3. Ezért a legnagyobb számjegy legfeljebb 6 lehet, hiszen a jegyek összege 9. Az első számjegy tehát a 6-os. Továbbra is a nagyobb számjegyeket minél előbbre érdemes tenni, hiszen annál nagyobb lesz a szám. Már csak a $2, 1, 0$ számjegyek használhatók. Így a legnagyobb szám a 6210.

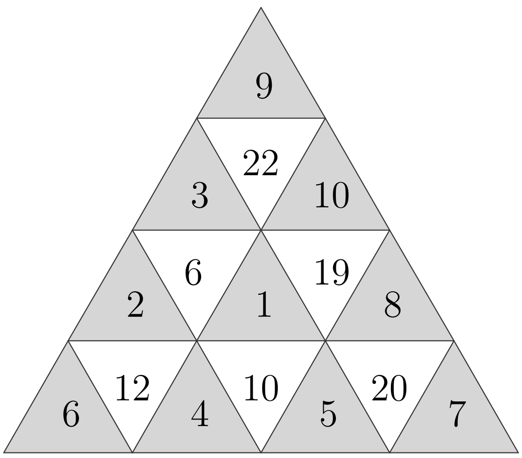
3.

a) Írjuk be 1-től 10-ig a számokat a szürke háromszögekbe úgy, hogy minden fehér háromszögben a vele oldallal szomszédos háromszögekbe írt számok összege szerepeljen!

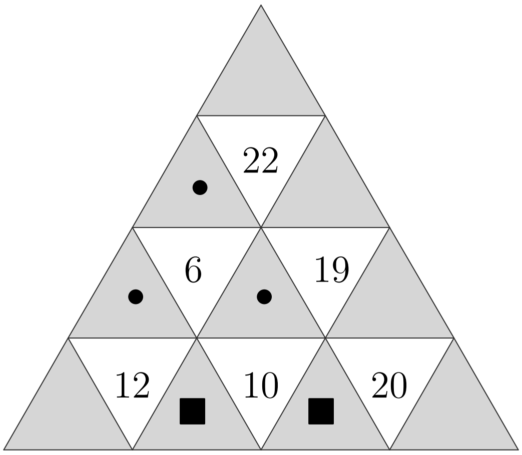
b) Lehet-e találni két kitöltést, amelyekben a középső háromszögbe írt szám különbözik?



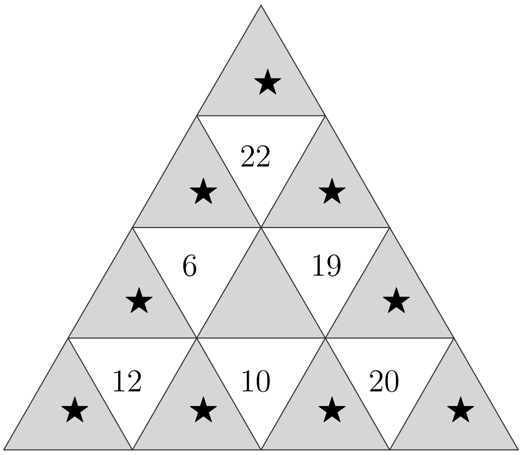

a) Az egyetlen helyes kitöltés:




b) *Első megoldás.* Nézzük az ábrán •-tal jelölt három háromszögeket. Az ezekbe írt számok összege 6, tehát ezen a három mezőn kell lennie az 1, 2, 3 számoknak.




Tekintsük most az ábrán ■-tel jelölt két mezőt. A legkisebb két ideírható szám a 4 és az 5. Emiatt a középső mezőbe csak az 1 kerülhet, hiszen a két ■-tel jelölt háromszögbe és a középsőbe írt számok összege 10. Tehát nincs két olyan kitöltés, amelyben a középső mezőbe írt számok különböznek. *Második megoldás.*




A 10 beírt szám összege $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$. Tudjuk, hogy az ábrán ★-gal jelölt számok összege $22 + 12 + 20 = 54$. A megjelölt számok között csak a középső mező száma nem szerepel, így annak feltétlenül 1-nek kell lennie.

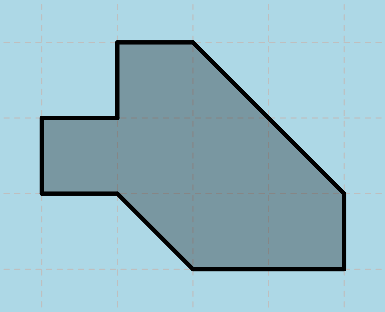
4. Osszuk fel az itt látható alakzatot

a) 3

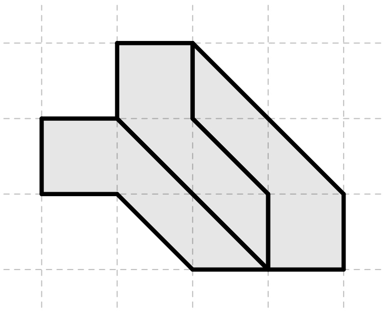
b) 5

c) 15

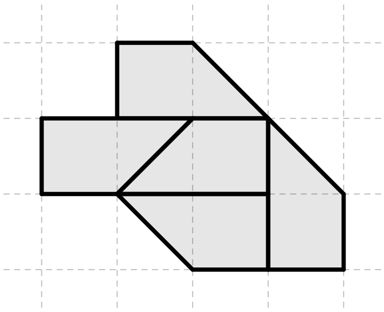
egybevágó (tükrözést is megengedve egymással fedésbe hozható) részre!



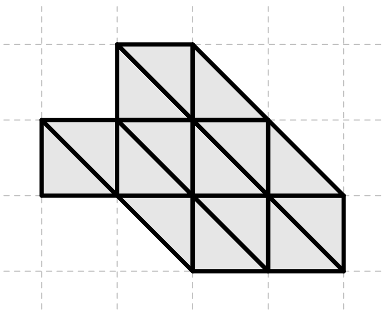
3 egybevágó részre az alábbi módon bonthatjuk fel az alakzatot:



5 egybevágó részre az alábbi módon bonthatjuk fel az alakzatot:



15 egybevágó részre az alábbi módon bonthatjuk fel az alakzatot:



*Megjegyzés.* Mind a 3 részfeladatra egyéb megfelelő megoldások is léteznek.

5. A király leghűségesebb szolgálójának a következő ajánlatot teszi:
„Ebben a ládában 2016 aranytallér van. Minden nap két lehetőség közül választhatsz.
1) Ha a ládában páros számú aranytallér van, elveheted az aranytalléroknak pontosan a felét.
2) Visszatehetsz a ládába pontosan 10 aranytallért az addig megszerzett aranyakból.
Rajtad kívül más nem fog sem betenni, sem kivenni aranyat. Ezt addig folytathatod, ameddig csak szeretnéd.”
Legfeljebb hány tallér jutalmat szerezhet így a ládából a szolgáló, és hogyan tudja ezt elérni?

2015 aranytallér megszerezhető. Világos, hogy ez a lehető legtöbb, hiszen 1 aranytallérnak mindenképpen maradnia kell minden lépés után. Az első típusú lépésben marad arany feltétlenül, hiszen pozitív szám fele is pozitív, míg a második lépés növeli az aranyak számát. A következő lépéssorozatot követően 1 aranytallér marad a ládában, vagyis 2015 aranytallért szerez az, aki ezt végrehajtja:

$$2016 \xrightarrow{1)} 1008 \xrightarrow{1)} 504 \xrightarrow{2)} 514 \xrightarrow{2)} 524 \xrightarrow{2)} \ldots \xrightarrow{2)} 1024 \xrightarrow{1)} 512 \xrightarrow{1)} 256 \xrightarrow{1)} \ldots \xrightarrow{1)} 8 \xrightarrow{1)} 4 \xrightarrow{1)} 2 \xrightarrow{1)} 1.$$

*Megjegyzés.* Más lépéssorozatokkal is elérhető, hogy egyetlen aranytallér maradjon a ládában.

**7. osztály** **Megyei forduló**

1. 20 teljesen azonos golyó belsejében elhelyeztük a pozitív egész számokat 1-től 20-ig, majd a golyókat egy dobozba tettük. Ezt követően egyesével elkezdjük kihúzni a golyókat és azonnal megállunk, ha az addig kihúzott golyókban lévő számok

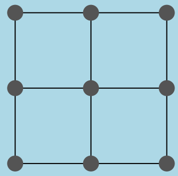
a) szorzata

b) összege

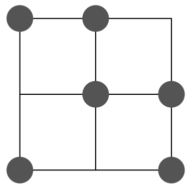
páros. Mindkét esetben add meg, hogy mi az a legkisebb szám, ahány húzásnál több biztosan nem történhetett.

A számok szorzata akkor és csak akkor lesz páros, ha van közöttük páros. Tehát az első esetben az első páros számot tartalmazó golyó felbukkanásáig fog tartani a húzás. Mivel 10 páratlan számot tartalmazó golyó van, így legfeljebb 11 golyót húzhattunk ki ebben az esetben. Ha az első páros összegig húzunk, akkor ha az első golyóban páros szám van, akkor rögtön véget is ér a húzás. Ha az első golyóban páratlan szám van, akkor a következő páratlan számot tartalmazó golyóig fog tartani a húzás. Mivel összesen 10 páros golyó van, így legfeljebb $1 + 10 + 1 = 12$ golyót húzhatunk ki ebben az esetben a dobozból.

2. Egy $2 \times 2$-es négyzetrács $3 \times 3$ rácspontja közül legfeljebb hányat színezhetünk pirosra, hogy ne legyen olyan téglalap, amelynek mind a négy csúcsa piros?



6 pontot ki lehet választani például az ábrán látható módon.



Ha ki lehetne választani 7 pontot, a skatulyaelv alapján az egyik sorból mindhárom pontot ki kéne választani. Ezen kívül még kell lennie 4 pontnak, tehát a maradék két sorból az egyikben legalább két pontnak kell lennie. Azonban ez a két pont és a három kiválasztott pontot tartalmazó sor azon két pontja, melyek egy oszlopban vannak ezzel a két ponttal, téglalapot alkotnak. *Megjegyzés.* A konstrukciónál ellenőrizni kell azt is, hogy a négy oldalfelező pont ne legyen kiválasztva, hiszen azok négyzetet (és így téglalapot) alkotnak.

3. Gondoltunk egy háromjegyű számra. Tudjuk, hogy az alábbi 7 állítás nem mind igaz, de az egymást követő állítások közül legalább az egyik igaz.
A) A szám osztható 7-tel.
B) A szám osztható 11-gyel.
C) A szám osztható 13-mal.
D) A szám osztható 77-tel.
E) A szám osztható 91-gyel.
F) A szám osztható 143-mal.
G) A szám utolsó számjegye 5.
Mi lehet a gondolt szám?

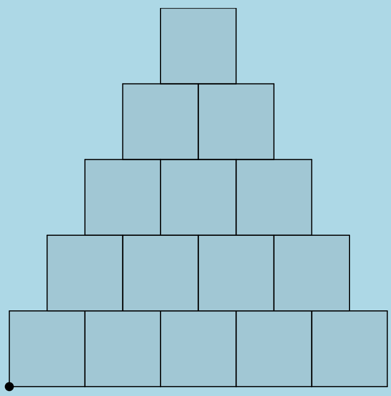
Mivel $77 = 7 \cdot 11$ és $91 = 7 \cdot 13$, és a D) és E) állítások közül legalább az egyik igaz, a szám biztosan osztható 7-tel. Hasonlóan, mivel $143 = 11 \cdot 13$, és az E) és F) állítások közül legalább az egyik igaz, a szám biztosan osztható 13-mal. Tehát az A) és C) állítások biztosan igazak. Ha a B) állítás is igaz lenne, akkor a szám osztható lenne $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$-gyel, tehát nem lehetne háromjegyű. Így a B) állítás hamis. Tehát a szám osztható 7-tel és 13-mal, de 11-gyel nem. Így a D) és F) állítások hamisak, az E) állítás igaz. Mivel F) hamis, G)-nek igaznak kell lennie. Tehát a szám 5-ösre végződik, azaz 5-tel osztható és páratlan. A szám 91-gyel is osztható az E) állítás miatt, így $5 \cdot 91 = 455$-tel is osztható. Mivel a szám páratlan és háromjegyű, csak a 455 felel meg. Tehát a gondolt szám a 455.

4. Van rengeteg $1 \times 1$-es és rengeteg $9 \times 9$-es négyzetünk. Ki lehet-e választani közülük 2222 darabot úgy, hogy össze lehessen belőlük állítani egy nagyobb négyzetet?

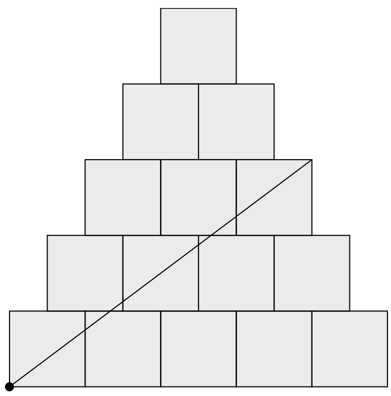
*Első megoldás.* Tegyük fel, hogy $k$ darab $9 \times 9$-es és $2222 - k$ darab $1 \times 1$-es négyzetet választottunk. Ekkor az összterületük $81k + (2222 - k) = 80k + 2222$. Mivel $80k$ osztható 10-zel, ezért $80k + 2222$ utolsó számjegye 2. Négyzetszám utolsó számjegye viszont nem lehet 2. Tehát $80k + 2222$, azaz a négyzeteink összterülete nem lehet négyzetszám. Így nem lehet belőlük nagyobb négyzetet összeállítani.

*Második megoldás.* Tegyük fel, hogy $k$ darab $9 \times 9$-es és $2222 - k$ darab $1 \times 1$-es négyzetet választottunk. Ekkor az összterületük $81k + (2222 - k) = 80k + 2222$. Ez az érték biztosan páros, de a fele, $40k + 1111$ biztosan páratlan, így $80k + 2222$ nem osztható 4-gyel. A páros négyzetszámok viszont 4-gyel is oszthatóak. Tehát $80k + 2222$, azaz a négyzeteink összterülete nem lehet négyzetszám. Így nem lehet belőlük nagyobb négyzetet összeállítani.

5. Az ábrán látható alakzatot négyzetekből állítottuk össze. Határozd meg azt az egyenest, amely áthalad az alakzat bal alsó csúcsán (az ábrán feketével jelölve), és felezi az alakzat területét. Válaszodat indokold!

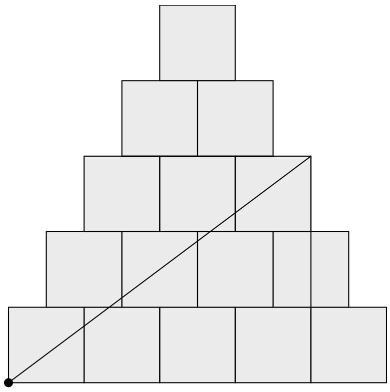


*Első megoldás.* Kössük össze a bal alsó csúcsot a 3 négyzetet tartalmazó sor utolsó négyzetének jobb felső csúcsával! Megmutatjuk, hogy az így kapott egyenes felezi az alakzat területét.



Tekintsük az alsó három sor bal szélén lévő 3-3 négyzetből álló alakzatot. Ez középpontosan szimmetrikus a középen lévő négyzet átlóinak metszéspontjára. Mivel az egyenesünk áthalad ennek az alakzatnak a szimmetriaközéppontján, ezért felezi annak a területét. Marad még a legfelső 3 négyzet az egyenes egyik oldalán, és a jobb alsó 3 négyzet az egyenes másik oldalán. Ezeknek a területe is egyenlő. Így az egyenesünk felezi a 15 négyzetből álló alakzat területét.

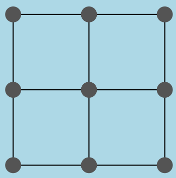
*Második megoldás.* Kössük össze a bal alsó csúcsot a 3 négyzetet tartalmazó sor utolsó négyzetének jobb felső csúcsával! Megmutatjuk, hogy az így kapott egyenes felezi az alakzat területét.



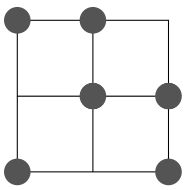
Állítsunk merőlegest a 3 négyzetet tartalmazó sor utolsó négyzetének jobb felső csúcsából az alakzatot alulról határoló egyenesre. Így az egyenesünk alatt egy derékszögű háromszög keletkezik. Ennek területe $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$ négyzet területének felel meg. Az egyenesünk ugyanezen oldalán még 1,5 négyzet található, így összesen 7,5 négyzetegységnyi terület található az egyenesünk egyik oldalán. Ez éppen a 15 négyzetből álló alakzat területének a fele. Így az egyenesünk felezi a 15 négyzetből álló alakzat területét.

**8. osztály** **Megyei forduló**

1. Egy $2 \times 2$-es négyzetrács $3 \times 3$ rácspontja közül legfeljebb hányat színezhetünk pirosra, hogy ne legyen olyan téglalap, amelynek mind a négy csúcsa piros?



6 pontot ki lehet választani például az ábrán látható módon.



Ha ki lehetne választani 7 pontot, a skatulyaelv alapján az egyik sorból mindhárom pontot ki kéne választani. Ezen kívül még kell lennie 4 pontnak, tehát a maradék két sorból az egyikben legalább két pontnak kell lennie. Azonban ez a két pont és a három kiválasztott pontot tartalmazó sor azon két pontja, melyek egy oszlopban vannak ezzel a két ponttal, téglalapot alkotnak. *Megjegyzés.* A konstrukciónál ellenőrizni kell azt is, hogy a négy oldalfelező pont ne legyen kiválasztva, hiszen azok négyzetet (és így téglalapot) alkotnak.

2. Van rengeteg $1 \times 1$-es és rengeteg $9 \times 9$-es négyzetünk. Ki lehet-e választani közülük 2222 darabot úgy, hogy össze lehessen belőlük állítani egy nagyobb négyzetet?

*Első megoldás.* Tegyük fel, hogy $k$ darab $9 \times 9$-es és $2222 - k$ darab $1 \times 1$-es négyzetet választottunk. Ekkor az összterületük $81k + (2222 - k) = 80k + 2222$. Mivel $80k$ osztható 10-zel, ezért $80k + 2222$ utolsó számjegye 2. Négyzetszám utolsó számjegye viszont nem lehet 2. Tehát $80k + 2222$, azaz a négyzeteink összterülete nem lehet négyzetszám. Így nem lehet belőlük nagyobb négyzetet összeállítani.

**Második megoldás.** Tegyük fel, hogy $k$ darab $9\times 9$-es és $2222-k$ darab $1\times 1$-es négyzetet választottunk. Ekkor az összterületük $81k + (2222 - k) = 80k + 2222$. Ez az érték biztosan páros, de a fele, $40k + 1111$ biztosan páratlan, így $80k + 2222$ nem osztható 4-gyel. A páros négyzetszámok viszont 4-gyel is oszthatóak. Tehát $80k + 2222$, azaz a négyzeteink összterülete nem lehet négyzetszám. Így nem lehet belőlük nagyobb négyzetet összeállítani.

3. Keressük meg azokat az $\overline{abcd}$ négyjegyű és $\overline{xyz}$ háromjegyű számokat, amelyekre a következők igazak: $\overline{abcd} = 70 \cdot \overline{xyz}$, $x = a - b$, $y = b - c$, $z = c - d$.

$d = 0$, hiszen $70 \cdot \overline{xyz}$ osztható 10-zel. Egyszerűsítve az egyenlőséget: $\overline{abc} = 7 \cdot \overline{xyz}$. $x$ csak 1 lehet, különben $\overline{xyz}$ legalább 200, és akkor a 7-szerese már négyjegyű szám. Mivel $z = c - d = c$, így $c$ olyan szám, melynek 7-szerese ugyanarra a számjegyre végződik, mint $c$. Tehát $c = 0$ vagy $c = 5$. Mivel $1 = x = a - b$, így $a$ eggyel több $b$-nél. $a$ legalább 7 (hiszen $7 \cdot \overline{xyz}$ legalább 700), így a következő 6 lehetőség van $\overline{abc}$-re: 760, 870, 980, 765, 875, 985. Ezek közül csak a 875 lesz jó. A feladat egyetlen megoldása: $\overline{abcd} = 8750$, $\overline{xyz} = 125$.

4. A király leghűségesebb szolgálójának a következő ajánlatot teszi:
,,Ebben a ládában 2016 aranytallér van. Minden nap két lehetőség közül választhatsz.
1) Ha a ládában páros számú aranytallér van, elveheted az aranytalléroknak pontosan felét.
2) Visszatehetsz a ládába pontosan 77 aranytallért az addig megszerzett aranyakból.
Rajtad kívül más nem fog sem betenni, sem kivenni aranyat. Ezt addig folytathatod, ameddig csak szeretnéd."
Legfeljebb hány tallér jutalmat szerezhet így a ládából a szolgáló, és hogyan tudja ezt elérni?

Vegyük észre, hogy a 2016 osztható 7-tel. Ha egy lépés előtt az aranytallérok száma oszható 7-tel, a lépés után is az marad: 7-tel osztható páros számnak a fele is osztható 7-tel (például a számelmélet alaptétele alapján), és egy 7-tel osztható számot 77-tel növelve ismét 7-tel osztható számot kapunk, hiszen a 77 osztható 7-tel, és két 7-tel osztható szám összege osztható 7-tel. Azt is észrevehetjük, hogy a ládában mindig marad legalább egy aranytallér: pozitív szám fele is pozitív, és pozitív számot növelve pozitív marad. Így legalább 7 aranytallérnak maradnia kell a végén a ládában: 7 a legkisebb 7-tel osztható pozitív egész. Ez meg is valósítható például a következő módon (mohó algoritmussal, csak akkor növelünk

77-tel, ha muszáj, mert felezni nem tudunk):

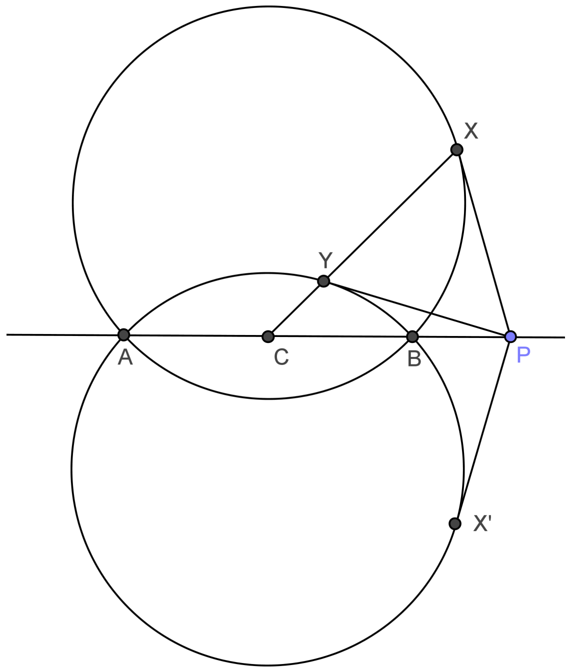
$$2016 \xrightarrow{1)} 1008 \xrightarrow{1)} 504 \xrightarrow{1)} 252 \xrightarrow{1)} 126 \xrightarrow{1)} 63 \xrightarrow{2)} 140 \xrightarrow{1)} 70 \xrightarrow{1)} 35 \xrightarrow{2)} 112 \xrightarrow{1)} 56 \xrightarrow{1)} 28 \xrightarrow{1)} 14 \xrightarrow{1)} 7.$$

Így a megszerezhető aranytallérok maximális száma: 2016-7=2009.

5. Adott két egyenlő sugarú kör, melyek egymást az $A$ és a $B$ pontban metszik. Felveszünk egy $P$ pontot az $AB$ szakasz $B$-n túli meghosszabbításán. A $P$ pontból érintőt húzunk a két körhöz úgy, hogy az érintési pontok, $X$ és $Y$ az $AB$ egyenesének ugyanarra az oldalára essenek. Tudjuk, hogy a rövidebb $\overset{\frown}{XB}$ és a rövidebb $\overset{\frown}{BY}$ körív együtt egy negyedkörívet tesz ki. Mekkora szöget zár be az $XY$ és az $AB$ egyenes?

Az ábra jelöléseit használjuk. Tükrözzük az $X$ pontot az $AB$ egyenesre. $X$ tükörképe, $X'$ a másik körön lesz, mert a két kör szimmetrikusan helyezkedik el az $AB$ egyenesre nézve (az egyenlő sugarak miatt). $PX = PX'$ a tükrözés miatt és $PX' = PY$, mert egy pontból egy körhöz húzott két érintőszakasz egyforma hosszú.tehát $PX = PY$.

Mivel a rövidebb $BX$ és a rövidebb $BX'$ ív egyforma hosszú a tükrözés miatt, így a feladat feltétele alapján a rövidebb $YX'$ ív egy negyedkörív. Ez pedig azt jelenti, hogy az $X'PY\sphericalangle$ szög derékszög (hiszen a $PY$ és a $PX'$ sugarak merőlegesek egymásra a negyedkörív miatt). Jelölje a $BPY\sphericalangle$ szöget $x$. Ekkor $BPX\sphericalangle = BPX'\sphericalangle = 90° - x$, és így $YPX\sphericalangle = 90° - 2x$. Mivel az $XYP$ háromszög egyenlőszárú, így $XYP\sphericalangle = YXP\sphericalangle = 45° + x$. Másrészt az $XYP\sphericalangle$ szög a $CPY$ háromszög külső szöge, így egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével. Ebből azonnal következik, hogy a keresett szög, $PCY\sphericalangle = 45°$.

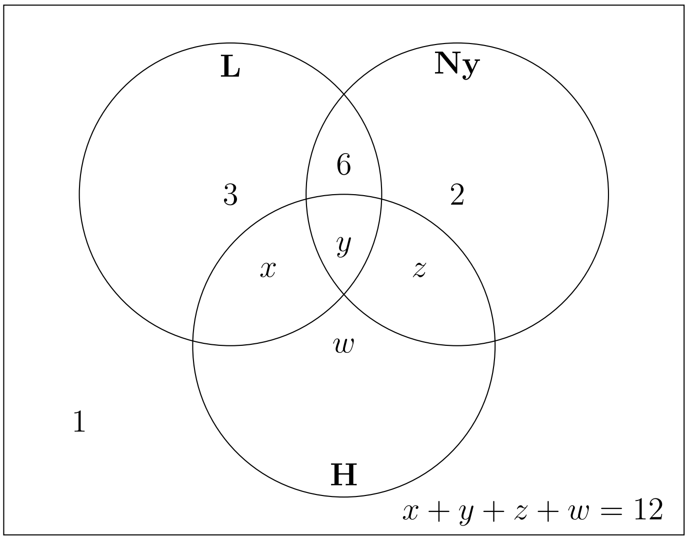


1. Az összes 3-jegyű számot felírtuk egy-egy kártyára, és ezeket mind beledobtuk egy zsákba. Hányat kell kihúznunk a zsákból bekötött szemmel, hogy a kihúzottak között biztosan legyen kettő olyan, melyekben a jegyek összege megegyezik?

Egy háromjegyű szám számjegyeinek összege legalább 1 (100), 0-val nem kezdődhet, ezért legalább egy darab 1-est kell tartalmaznia, és legfeljebb 27 (999), mert a 9-es a legnagyobb számjegy, és ebből legfeljebb három darab lehet. 1 és 27 között minden szám létrejöhet számjegyösszegként. Például 100-tól indulva mindig csak egy számegyet növelünk eggyel, és amelyik már elérte a 9-et, azt már nem változtatjuk. Így minden lépésben eggyel nő a számjegyösszeg, és elérjük a 999-et. (Az is elfogadható, ha a versenyző minden összegre mutat példát.) 27-féle összeg van, tehát legfeljebb 27 számot húzhatunk. Ha 28-at húzunk, biztosan lesz két egyforma számjegyösszeg. Tehát 28 számot kell húznunk.

2. Egy kártyapakli lapjain 4 féle figura lehet: egy kutya, egy kutyaház, egy labda és a kutyán nyakörv. Mindegyik lapon van kutya, viszont a többi figura vagy van, vagy nincs a lapokon. Nyakörvből és labdából többféle is akad, míg kutya és kutyaház csak egyféle van. Egy-egy kártyán akár mind a 4 figura is ott lehet. A pakliban nincs két egyforma lap. Tudjuk még a következőket is:
(1) Egy olyan lap van, amin csak kutyus található.
(2) Olyan, amelyiken nincs kutyaház, és labda sincs, 3 db van.
(3) Se kutyaház, se nyakörv nincs 4 lapon.
(4) 12 lapon van kutyaház.
(5) Nincs kutyaháza, de van nyakörve 8 kutyusnak.
Hány lapos a kártyapakli?

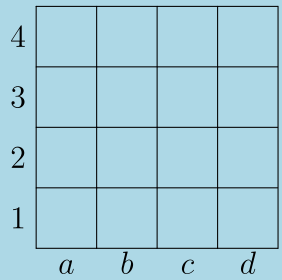
*Első megoldás.* Készítsünk halmazábrát, és írjuk bele az adatokat! (1) Ez az egy lap az ábrán kívülre kerül. (2) ,,olyan, melyen nincs ház és nincs labda, 3 van”, de ezek között ott van az is, amelyiken csak kutya van, így a csak nyakörves mezőbe 2 kerül. (3) nincs ház és nincs nyakörv 4 lapon, de ezek között is ott van a csak kutyás lap, ezért a csak labdás mezőbe 3 lap kerül. (5) A nyolc házatlan nyakörves kutyus közül csak 2 nyakörves, a többi 6-nak labda jut, ez a 6 kerül az L és az NY közös részébe. (4) A 12 kutyaházas lap a H halmaz 4 mezőjében bárhogy lehet, de másutt nem, ezért a beírt számok összege a lapok száma: 1+2+3+6+12=24.



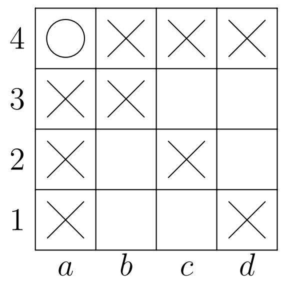

*Második megoldás.* Hasonló az előzőhöz, csak ábra nélkül. A feltétel szerint biztosan van olyan lap, amin csak egy kutya látható. Az összes többi lapon legalább 2 figura van, amiből az egyik kutya. 3 lapon nincs se kutyaház, se labda. Ebből az egyik az, amelyiken csak kutya van. Tehát van még 2 lap, amelyen 1-1 nyakörves kutya látható. Ez eddig összesen 3 lap. Mivel 4 lapon se kutyaház, se nyakörv nincs, így a csak kutyát tartalmazó lapon kívül kell lennie 3 lapnak, amelyen 1-1 kutya látható labdával. Ez az előzőekkel együtt eddig 6 lap. Az eddigi lapok egyikén sem volt kutyaház, így a (4) feltétel alapján van még 12 lap, melyeken szerepel kutyaház. Ahhoz, hogy a lapok különbözőek legyenek, ezek közül legalább 11-en labdának vagy nyakörvnek kell lennie. Ez eddig összesen 18 lap. Az (5) feltétel szerint 8 olyan kutyus van, amelyiknek nincs kutyaháza. Mivel ilyen eddig 2 volt, még kell lennie 6-nak. Összesen tehát 24 lapos a pakli.

*Harmadik megoldás.* A kártyáknak három tulajdonsága van, kutyaház, nyakörv, labda.
A kutyaház „értéke” 0 vagy 1 aszerint, hogy van a lapon kutyaház, vagy nincs. A nyakörv értéke 0,1 vagy 2, hiszen a (2) feltétel alapján nyakörv alapján a kártyák háromfélék lehetnek. A labda értéke 0, 1, 2 vagy 3, hiszen a (3) feltétel alapján labda alapján a kártyák négyfélék lehetnek. Ha van kutyaház, akkor nyakörvből és labdából a lehetséges $3 \cdot 4 = 12$ variációból mindegyiknek elő kell fordulnia a (4) feltétel alapján. (5) alapján ha nincs kutyaház de van nyakörv, akkor nyakörvből és labdából a lehetséges $2 \cdot 4 = 8$ variációból mindegyiknek elő kell fordulnia. Ha nincs kutyaház és nincs nyakörv, akkor ladbából mind a 4 lehetőségnek elő kell fordulnia. Ezek szerint a lehetséges $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ variáció mindegyikének elő kell fordulnia, több lehetőség pedig nincs, mert minden kártya különböző.

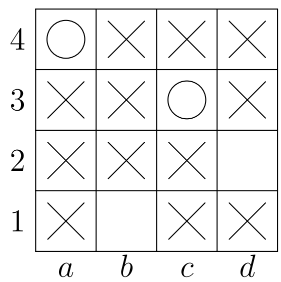
3. Egy $4 \times 4$-es táblán helyezz el 4 korongot úgy, hogy a sorok, oszlopok, valamint a négyzet két átlójának egyikében se legyen egynél több korong! Hány különböző megoldás van, ha a forgatással egymásra vihetőket egyformának tekintjük?

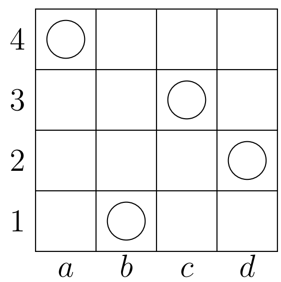



1. eset: valamelyik sarokban szerepel korong. Forgassuk el a táblát úgy, hogy ez az $a4$ sarok legyen. Az ábrán X jelöli azokat a mezőket, ahová már nem tehetünk korongot. Most a 3-as sorban még két lehetőség van, a $c3$ és a $d3$ mező.

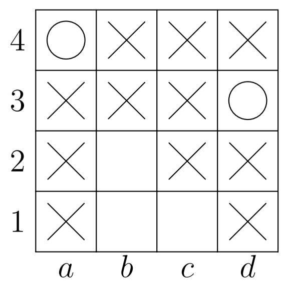


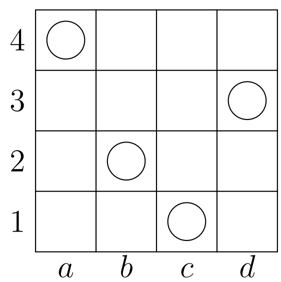

Válasszuk a $c3$ mezőt, és tegyünk X-eket $c3$ sorába, oszlopába és átlójába! Már csak két szabad mezőnk maradt, $d2$ és $b1$, ezek jók is. Az 1. jó megoldás tehát $a4$, $c3$, $b1$, $d2$.





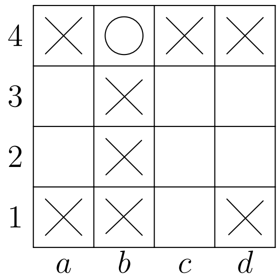

Most válasszuk a $d3$ mezőt, és tegyünk X-eket $d3$ sorába és oszlopába. Ezután $b1$-re nem tehetünk korongot, mert a negyedik korongot nem tudnánk elhelyezni, ezért csak $b2$-re és $c1$-re kerülhet a további két korong. A 2. jó megoldás tehát $a4$, $b2$, $c1$, $d3$.



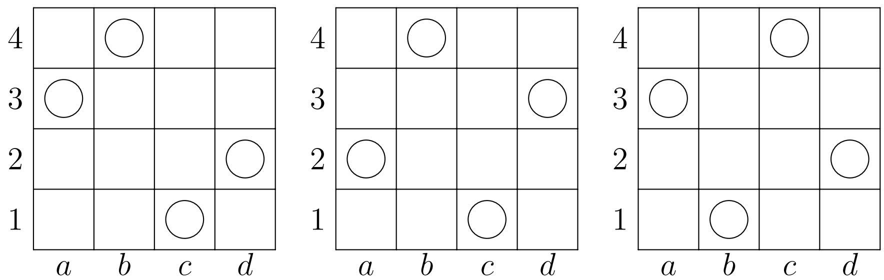



2. eset: egyik sarokban sem szerepel korong. Ekkor a 4-es sorban a $b4$ és a $c4$ mezők egyikébe

tehetünk korongot (vegyük észre, hogy ezek a mezők nem forgathatók egymásba). Válasszuk először $b4$-et.



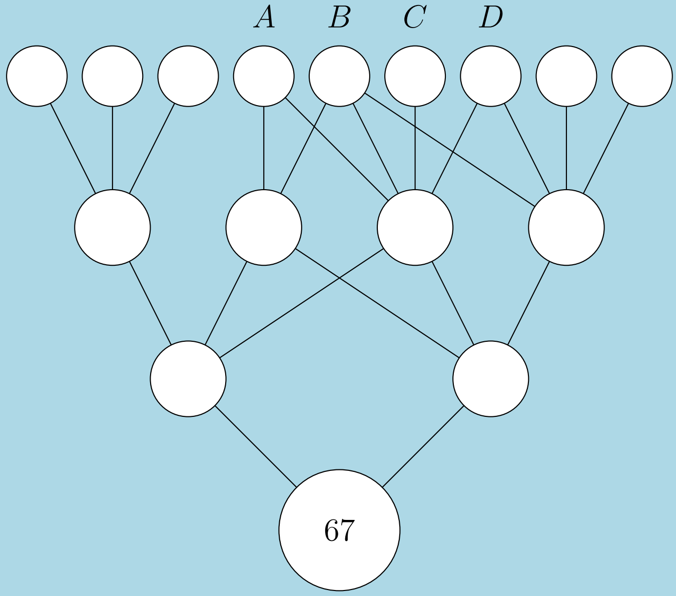
Ekkor az $a$ oszlopban két lehetőségünk van: $a3$ és $a2$. Ha $a3$-at választjuk, csak a $c1$ és a $d2$ mezők maradnak választhatók, ha pedig $a2$-t, akkor a $c1$ és a $d3$ mezőket választhatjuk. (Ne feledjük, a sarokmezőket már nem választhatjuk.) Így kapjuk a 3. és a 4. jó megoldást. Ha $c4$-et választjuk, teljesen hasonló módon kapunk még két megoldást, viszont abból az egyik 90 fokos forgatással fedésbe hozható az előző $a3$, $b4$, $c1$, $d2$ megoldással. A feladatnak tehát 5 jó megoldása van.



4. Egy matekverseny második fordulójába 340 gyerek jutott be. A fiúk számának 2/3 része egyenlő a lányok számának 3/4 részével. Hány lány jutott a második fordulóba?

*Első megoldás.* A fiúk számának 2/3 része egyenlő a lányok számának 3/4 részével, legyen ez a szám $N$.
A fiúk száma $N$ 3/2 része. A lányok száma $N$ 4/3 része. Az összlétszám a fiúk és a lányok számának összege. 3/2+4/3=17/6, tehát 340 egyenlő az $N$ 17/6 részével. Így $N$ egyenlő a 340 6/17 részével, azaz $N = (340 : 17) \cdot 6 = 120$. A lányok száma $N$ 4/3 része, azaz a lányok száma $(120 : 3) \cdot 4 = 160$.
*Második megoldás.* Közös nevezőre hozva
a fiúk számának 8/12 része egyenlő a lányok számának 9/12 részével. Tehát a fiúk vannak többen, és a fiú-lány arány 9:8. A 340-et ilyen arányban kell felbontani. 9+8=17, 340:17=20, (tehát a fiúk száma $9 \cdot 20 = 180$,) a lányok száma $8 \cdot 20 = 160$.

5. Helyezd el az 1, 2, 3 ... 9 számokat a legfelső sorban lévő körökbe. Minden további körbe az a szám kerül, amelyik a fölötte szereplők összege, de csak azoké, amelyekkel vonal köti össze. A legalsó összeg 67.
a) Töltsd ki az ábrát!
b) Hány megoldás lehetséges az $A, B, C, D$ körök kitöltésére?



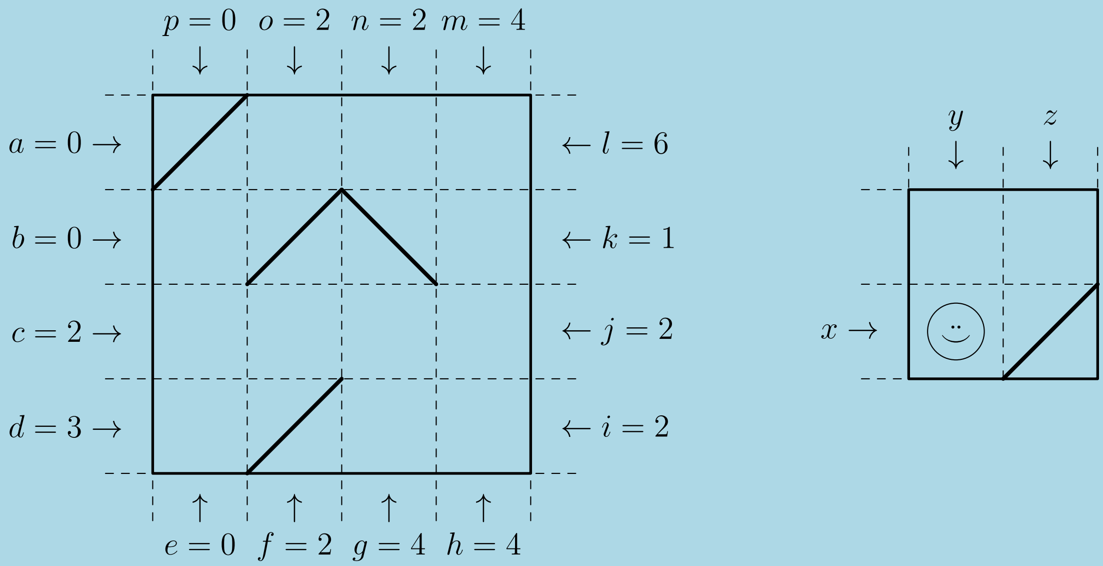

A felső sor számai annyiszor adódnak az összeghez, ahány féle módon leérkezhetnek a vonalak mentén. A felső sorba írt számok közül azok, melyeket nem jelöl betű, csak egyszeresen jelennek meg a 67-ben összeadandóként.
$A$-ból 4, $B$-ből 5, $C$-ből 2, $D$-ből 3 féle módon lehet lejutni a 67-hez.
1+2+3+4+5+6+7+8+9=45, 67-45=22, a többlet pedig $22 = 3A + 4B + C + 2D$. Ha ezt az egyenlőséget teljesíti az $(A, B, C, D)$ számnégyes, a többi szám tetszőlegesen választható (a maradék számok közül).
Ha $B = 3$, a legkisebb lehetséges összeg $3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 4 + 2 \cdot 2 = 23$, ami már túl sok. Tehát $B = 1$ vagy $B = 2$. Ha $B = 2$, akkor $3A + C + 2D = 14$. Itt a megoldások: $A = 1$, $C = 3$, $D = 4$ és $A = 1$, $C = 5$, $D = 3$. Ha pedig $B = 1$, akkor $3A + C + 2D = 18$, ahonnan $A = 2$, $C = 6$, $D = 3$ és $A = 3$, $C = 5$, $D = 2$ adódik. Tehát az $(A, B, C, D)$ számnégyesre négy lehetőség adódik: $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 2, 5, 3)$, $(2, 1, 6, 3)$ és $(3, 1, 5, 2)$.

1. Választottam 3 különböző pozitív számjegyet, leírtam az összes olyan 3-jegyű számot, ami ebből a 3 számjegyből készíthető, majd összeadtam a leírt 3-jegyűeket. Az összeg 1776. Mi lehetett a 3 számjegy?

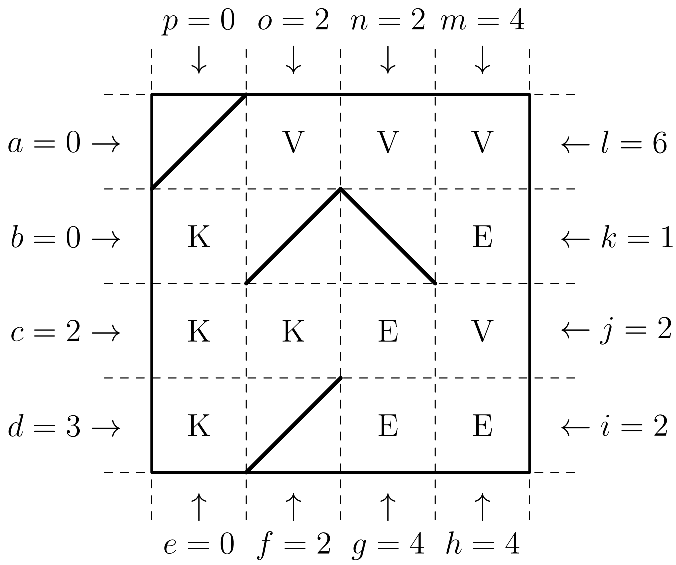
*Első megoldás.* Ha darab számot adtunk össze, mert hatféle sorrendje van a 3 különböző számjegynek. Mindegyik számjegy mindegyik helyiértéken pontosan kétszer szerepel, így mindhárom helyiértéken a számjegyek összegének kétszerese áll. A helyiértékek összege 10+10+1=111, így ha a számjegyek összege $A$, akkor $2 \cdot A \cdot 111 = 1776$. Innen a számjegyek összege, $A = 1776 : 222 = 8$, tehát a számjegyek 1, 2 és 5, vagy 1, 3 és 4.

*Második megoldás.* Próbálkozzunk! 123+132+213+231+312+321=1332, ez kevés. 124+142+214+241+412+421=1554, ez is kevés. 125+152+215+251+512+521=1776, ez jó. Mindegyik számjegy mindegyik helyiértéken pontosan kétszer szerepel, így az összeg csak a számjegyek összegétől függ. Tehát mindegyik megoldásban ugyanannyi a számjegyek összege. Mivel a talált megoldásban 1+2+5=8, így a számjegyek összege 8. 8=1+3+4, és más megoldás nincs.

2. Peti egy Kísértet tanya nevű feladványt talált egy rejtvényújságban: egy $4 \times 4$-es táblázat egyes mezőiben átlósan elhelyezett tükrök vannak. Ezek mindkét oldalukon tükröződnek. A táblázat szabadon maradt mezőibe egy-egy lakót kell beköltöztetni úgy, hogy ha a táblázat valamelyik sorába, vagy oszlopába betekintünk, akkor épp annyi lakót lássunk, amennyit az odaírt szám jelöl. A nehézséget a lakók jelentik: 4 ember – ők láthatók, és tükörképük is látható, azaz tükröződnek; 4 kísértet – ők nem láthatók, viszont tükröződnek, 4 vámpír – ők láthatók, de nem tükröződnek. Petinek sikerült megoldani feladatot. Neked sikerül?




(Ha a jobb oldali rajzon látható mosolygós arc egy ember, akkor az $x$, $y$ és $z$ irányokból is látszik. Ha kísértet, akkor csak a $z$ irányból, ha vámpír, akkor viszont csak $x$ és $y$ irányból látszik.)

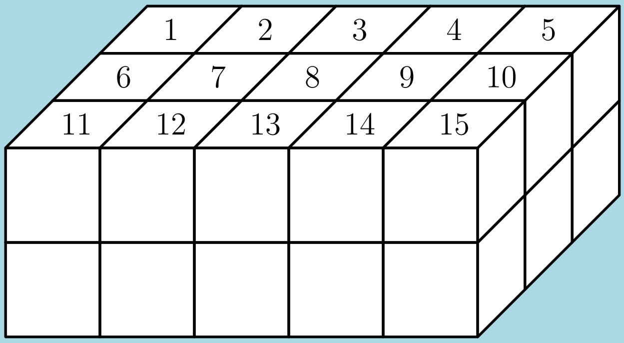



$l = 6$ és $e = 0$ miatt a felső sorban lakók láthatók, és nem tükröződnek, tehát vámpírok (ez 3 vámpír). A bal szélső oszlopban lakók nem láthatók, de tükröződnek, tehát kísértetek (ez 3 kísértet). $n = 2$ és $k = 1$ miatt $b$ (és $k$) sorának jobb szélső mezőjében látható és tükröződő lény lakik, tehát ember. $f = 2$ és $i = 2$ miatt $d$ (és $i$) utolsó két mezőjében látható és tükröződő lények laknak, tehát emberek. $d = 3$ és $g = 4$ a $c$ (és $j$) sorának középső két lakójáról ad információt. Mindkettő tükröződik, hiszen a bal alsó sarok kísértete nem számít bele a $d = 3$-ba, azaz egyik sem vámpír. Mivel $g = 4$ miatt a két lakóból a jobb oldali látható, így ő ember, a másik pedig kísértet. A kimaradó helyen vámpírnak kell lennie, ami kielégíti a feladat feltételeit.

3. Felírtuk egy táblára a pozitív egész számokat 1-től 2016-ig. Egy lépésben valamelyik kettőt letöröljük, és **mindkettő helyett** felírjuk a különbségüket. Ezt a lépés ismételgetjük. Elérhető-e, hogy valamelyik lépés után mindegyik szám
a) 3
b) 17 legyen?

Minden egész szám elérhető 1-től 2015-ig.
Legyen a cél az $N$ szám. Az 1, $N + 1$ számok helyett írjuk fel az $N$, $N$ párt. A többi 2014 számot rendezzük párokba, és írjuk fel helyettük a különbségüket: így kapunk 1007 darab párt, melyek egyforma számokból állnak. Ezután az összes ilyen párból csináljunk 0, 0 párt. Van tehát 2014 darab nullánk, és két $N$-ünk. Most a nullákat az egyik $N$-nel párosítva 2014 lépésben elérhetjük, hogy mindegyik szám $N$ legyen.

4. Építettünk egy téglatestet egységkockákból, melyben az egy csúcsba futó élek hossza 2, 3, 5 egység. Egyesével elvesszük a kockákat úgy, hogy minden lépésben a kapott test felszíne változatlan maradjon. (Az elvétel során ügyelj arra, hogy a test „egyben” maradjon, azaz ha a teljes lappal egymáshoz csatlakozó kockákat összeragasztanánk, az építményt egy kockánál fogva fel lehessen emelni.)
a) Vegyél el minél több egységkockát!
b) Mennyi az elvehető egységkockák maximális száma?
(A kockákat a leírás megkönnyítése érdekében megszámoztuk az ábra szerint. Az alsó réteg kockáinak sorszáma mindig 15-tel nagyobb, mint a felette lévő kockáé.)




Az eljárás lényege, hogy minden lépésben olyan kiskockát vegyünk el, melynek 3 lapja látszik, mert így 3 lapja van takarásban, és elvételekor a 3 látható lapja eltűnik, cserébe a három takarásban lévő lap megjelenik (azok, amelyekhez ennek a kockának a nem látható lapjai csatlakoztak).
Az eredeti felszín $2 \cdot (2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5) = 62$.
Legkevesebb hány kocka maradhatott?
Legkevesebb kockát akkor használunk, ha a legkevesebb lap mentén illesztünk. Mivel a testnek egyben kell maradnia, minden benne lévő kocka legalább egy lapja csatlakozó felület. Induljunk ki egy kockából. Ehhez ragasztva a következőt négy egységgel nő a felszín, mert a ragasztásnál elvesztünk két lapot. Ezt folytatva 14 lépésben érjük el a 62-t ((62-6):4=14). Tehát legalább 15 kockából kell állnia egy ilyen építménynek.
Ez el is érhető, például ezek elvételével: 1, 5, 11, 15, 2, 4, 12, 14, 7, 9, 8, 17, 19, 27, 19. Így 15 kockát vettünk el, és a test még egyben maradt.

1. Hány olyan négyjegyű szám van, amelynek utolsó számjegye nagyobb, mint az első számjegye?

Az első számjegy nem lehet 0, és mivel az utolsó nagyobb nála, az sem lehet 0. Első és utolsó számjegynek tehát két különbözőt kell választanunk az 1, …, 9 számjegyek közül. Ha az első számjegy 1-es, akkor az utolsó 8-féle lehet, ha az első számjegy 2-es, akkor az utolsó 7-féle, stb. Így ez összesen $8+7+\ldots+1=36$ lehetőség.
(Másképp: Az egyik számot 9, a másikat 8 lehetőség közül választhatjuk, de így minden párt kétszer számolunk, tehát $\frac{9\cdot 8}{2}=36$ lehetőség van.) A középső két számjegyet tetszőlegesen választhatjuk, tehát mindkettő 10-féle lehet. Így összesen $36\cdot 10\cdot 10=3600$ darab négyjegyű szám rendelkezik a megadott tulajdonsággal.

2. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyikét pontosan egyszer felhasználva felírtunk öt pozitív egész számot. Hány négyzetszám lehet ezek között? Adj minden lehetőségre példát! (Négyzetszámnak nevezzük azokat az egész számokat, amelyek megkaphatók egy egész szám önmagával vett szorzataként.)

Lehetséges, hogy nincs közöttük négyzetszám, pl.: **12, 34, 5, 67, 89**. Lehetséges, hogy 1 négyzetszám van közöttük, pl.: **1** $(=1^2)$**, 23, 45, 67, 89**. Lehetséges, hogy 2 négyzetszám van közöttük, pl.: **1** $(=1^2)$**, 4** $(=2^2)$**, 23, 56, 789**. Lehetséges, hogy 3 négyzetszám van közöttük, pl.: **1** $(=1^2)$**, 4** $(=2^2)$**, 9** $(=3^2)$**, 23, 5678**. Lehetséges, hogy 4 négyzetszám van közöttük, pl.: **1** $(=1^2)$**, 4** $(=2^2)$**, 9** $(=3^2)$**, 25** $(=5^2)$**, 3678**. Lehetséges, hogy mind az 5 négyzetszám, pl.: **1** $(=1^2)$**, 9** $(=3^2)$**, 25** $(=5^2)$**, 36** $(=6^2)$**, 784** $(=28^2)$.

*Megjegyzés.* A 0, …, 4 négyzetszámot tartalmazó esetek mindegyikére sok lehetőség van, de megmutatható, hogy mind az 5 szám csak a fenti módon lehet négyzetszám.

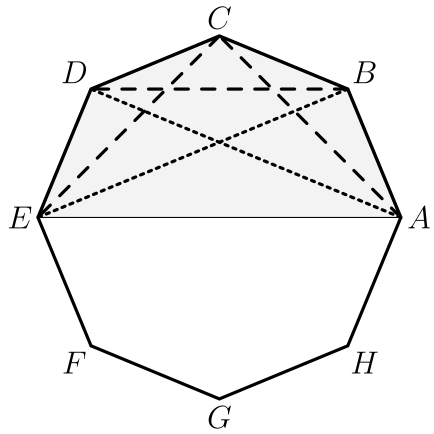
3. Egy dominókészlet köveinek egyik oldala egy vonallal két részre van osztva. Az egyes részek mindegyikén 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 pötty lehet. A készlet a lehető legtöbb dominót tartalmazza úgy, hogy nincs közöttük két egyforma. (Két dominó egyforma, ha egymás alá helyezhetők úgy, hogy a választóvonalak egy egyenesbe esnek és az egymás alatti részek azonos számú pöttyöt tartalmaznak.)
a) Hány dominóból áll a készlet?
b) Mutasd meg, hogy nem lehet az összes dominót egymás mellé helyezni egy sorba úgy, hogy a szomszédos dominók érintkező részein azonos számú pötty legyen!

Olyan dominóból, melynek mindkét térfelén azonos számú pötty található, 6-féle van. Ha a dominó két részén különböző a pöttyök száma, akkor az egyik térfélen 6, a másikon 5-féle érték lehet, de az $(a;b)$ és a $(b;a)$ dominók egyformák, így $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ ilyen dominó van. Tehát összesen $6+15=21$ dominóból áll a készlet. (Az összes lehetőség felsorolásával kapott helyes értékért is járnak a fenti pontok.)
Ha kirakható lenne a feltételeknek megfelelő dominósor, akkor a dominók találkozásánál mindig egyforma számú pötty lenne egymás mellett. Emiatt a sorban minden pöttyszám mindig kétszer egymás után szerepelne, kivéve a sor legszélén lévő térfelek pöttyszámait. Tehát azoknak a pöttyszámoknak, amelyek nem szerepelnek a sor valamelyik szélén, összesen páros alkalommal kell szerepelniük. Azonban minden pöttyszám összesen páratlan számú térfélen szerepel a készletben: kétszer az $(a;a)$ típusú dominón, és ötször a másik öt

értékkel párosítva. Így a feltételeknek megfelelő sor nem tartalmazhatja az összes dominót.

4. Peti rajzolt egy ötszöget. Ezután meghatározta az oldalak és az átlók hosszát. Lehetséges-e, hogy ezekre pontosan négy különböző értéket kapott úgy, hogy az egyik érték egyszer, a másik kétszer, a harmadik háromszor, a negyedik négyszer fordult elő?

*Első megoldás.* Legyen $ABCDEFGH$ egy szabályos nyolcszög, ekkor az $ABCDE$ ötszög megfelelő. A szabályos nyolcszögben a szimmetriák miatt minden oldal, minden másodszomszédos csúcsot összekötő átló, minden harmadszomszédos csúcsot összekötő átló, valamint minden negyedszomszédos (átellenes) csúcsot összekötő átló is egyenlő hosszúságú. A fenti távolságok ráadásul egymástól mind különbözőek.

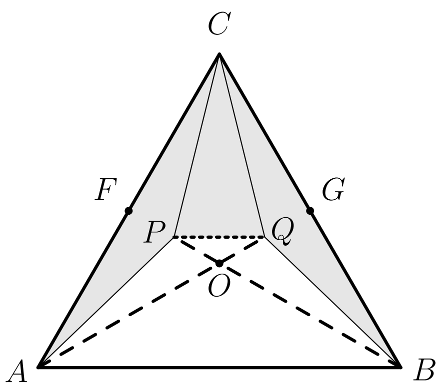



Így $AB = BC = CD = DE < AC = BD = CE < AD = BE < AE$, tehát az $ABCDE$ ötszög valóban teljesíti a feltételeket.

*Megjegyzés.* Szabályos nyolcszög helyett bármely $n$ oldalú szabályos sokszög 5 szomszédos csúcsa megfelelő ötszöget alkot, ha $n \geq 8$ (kisebb oldalszám esetén nem lesz 4 különböző hosszúság).

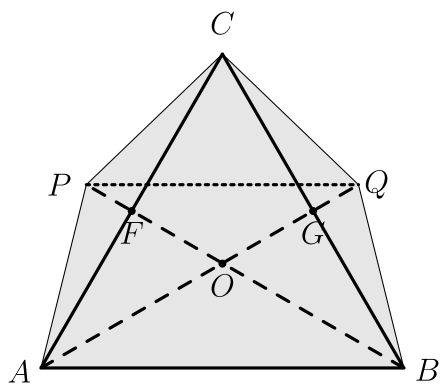
Ugyancsak megfelel a fenti nyolcszögben az $ACDFG$ ötszög, vagy a nyolcszög köré írható kör $O$ középpontjával az $ABCDO$ ötszög.

*Második megoldás.* Legyen $ABC$ egy szabályos háromszög, az $AC$ és $BC$ oldalak felezőpontjai $F$ és $G$, a felezőmerőlegesek metszéspontja $O$. Legyen továbbá $P$ az $FO$, $Q$ pedig a $GO$ szakasz felezőpontja. Ekkor az $APQBC$ ötszög megfelel a feltételeknek.

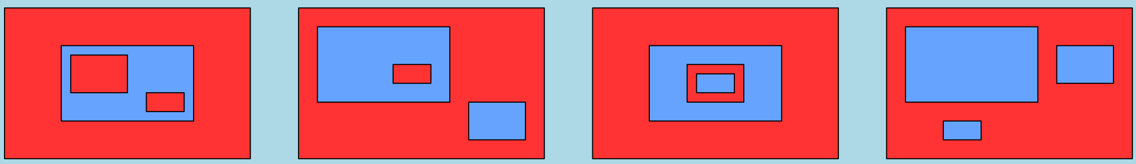


$AB = BC = CA$, mivel ezek a szabályos háromszög oldalai. Mivel $P$ rajta van az $AC$ oldal felezőmerőlegesén, ezért $AP = PC$, de a szimmetria miatt ezek $BQ$-val és $QC$-vel is egyenlők, ez 4 egyenlő szakasz. Ugyancsak a szimmetria miatt $AQ = BP$. Látható, hogy nincs több egyenlőség a szakaszok között ($PQ < AP = PC = BQ = QC < AQ = BP < AB = BC = AC$), ezért az $APQBC$ ötszög valóban teljesíti a feltételeket.

*Megjegyzés.* A felezőmerőlegeseken máshol is felvehetnénk (szimmetrikusan) a $P$ és $Q$ pontokat, az egyenlőségek akkor is fennállnak. Arra kell ügyelni, hogy létrejöjjön 4 különböző távolság, illetve megrajzolható legyen az ötszög.




5. Négy különböző méretű, téglalap alakú szőnyegünk van. A szőnyegek egyik oldala piros, a másik kék. Egymásra helyeztük a szőnyegeket négy különböző elrendezésben (ld. ábra). Az első három esetben meghatároztuk, hogy mekkora piros területet látunk. Határozd meg a látható piros terület nagyságát a negyedik elrendezésnél!



$314\ \text{dm}^2$ $\quad$ $196\ \text{dm}^2$ $\quad$ $262\ \text{dm}^2$ $\quad$ ?

*Első megoldás.* Induljunk ki az első ábrán látható elrendezésből, és fordítsuk meg a legkisebb szőnyeget úgy, hogy a kék oldalát lássuk. Ekkor a piros terület a legkisebb szőnyeg területével csökkent. Húzzuk ezt a szőnyeget a második legkisebb szőnyeg tetejére. Ekkor ismét a legkisebb szőnyeg területével csökken a piros terület, és pontosan ugyanannyi lesz, mint a harmadik ábrán. A változás, azaz a legkisebb szőnyeg területének kétszerese tehát $314\ \text{dm}^2 - 262\ \text{dm}^2 = 52\ \text{dm}^2$. Induljunk ki most a második ábra elrendezéséből, fordítsuk meg a legkisebb szőnyeget a kék felére, és húzzuk olyan helyre, ahol a legnagyobb szőnyeg felett van, de nem érintkezik a második legnagyobb szőnyeggel. Ekkor ismét a legkisebb szőnyeg területének kétszeresével, azaz $52\ \text{dm}^2$-rel csökkent a piros terület. Így azonban éppen olyan elrendezést kaptunk, mint amilyen a negyedik ábrán látható. Tehát a negyedik ábrán $52\ \text{dm}^2$-rel kevesebb piros terület látszik, mint a másodikon. Azaz a negyedik ábrán a látható piros terület $196\ \text{dm}^2 - 52\ \text{dm}^2 = 144\ \text{dm}^2$.

*Második megoldás.* Jelölje a szőnyegek területét $A > B > C > D$.
Ekkor az első ábrán látható piros terület: $A - B + C + D = 314\ \mathrm{dm}^2$. A második ábrán látható piros terüle:t $A - B - C + D = 196\ \mathrm{dm}^2$. Ez az előzőnél $2C$-vel kevesebb, tehát $2C = 314 - 196 = 118\ \mathrm{dm}^2$. A harmadik ábrán látható piros terület: $A - B + C - D = 262\ \mathrm{dm}^2$. A negyedik ábrán látható piros terület $A - B - C - D$. Ez az előzőnél éppen $2C = 118\ \mathrm{dm}^2$-rel kevesebb, azaz $262\ \mathrm{dm}^2 - 118\ \mathrm{dm}^2 = 144\ \mathrm{dm}^2$.

*Harmadik megoldás.* Jelölje a szőnyegek területét $A > B > C > D$.
Ekkor az első ábrán látható piros terület: $A - B + C + D = 314\ \mathrm{dm}^2$. A második ábrán látható piros terület: $A - B - C + D = 196\ \mathrm{dm}^2$. A harmadik ábrán látható piros terület: $A - B + C - D = 262\ \mathrm{dm}^2$. A negyedik ábrán látható piros terület:
$A - B - C - D = (A - B - C + D) + (A - B + C - D) - (A - B + C + D) = 196\ \mathrm{dm}^2 + 262\ \mathrm{dm}^2 - 314\ \mathrm{dm}^2 = 144\ \mathrm{dm}^2$.

## 6. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. Egy négyjegyű szám minden számjegye különböző. Azt is tudjuk, hogy ha az első számjegyet elhagyjuk, akkor egy 9-cel osztható, ha a másodikat, akkor egy 2-vel osztható, ha a harmadikat, akkor egy 5-tel osztható, ha a negyediket, akkor egy 4-gyel osztható háromjegyű számot kapunk. Hány ilyen négyjegyű szám van?

Az utolsó számjegy páros, hiszen, ha a második számjegyet elhagyjuk, akkor páros számot kapunk. Másrészt 5-tel is osztható az utolsó számjegy, hiszen a harmadik számjegyet elhagyva 5-tel osztható számot kapunk. Vagyis az utolsó számjegy 0. Mivel az első számjegyet elhagyva 9-cel osztható számot kapunk, ezért az utolsó három számjegy összege 9-cel osztható. Mivel az utolsó 0, ezért a középső két számjegy összege osztható 9-cel. Az utolsó számjegyet elhagyva 4-gyel osztható számot kapunk, vagyis a középső két számjegyet tekintve egy 4-gyel osztható számot kapunk. Ez a kétjegyű szám a korábbiak miatt 9-cel is osztható, így csak 36 és 72 lehet. Vagyis a szám $\overline{a360}$ vagy $\overline{b720}$ alakú. Az első számjegytől függetlenül most már minden feltétel teljesülni fog, tehát csak arra kell figyelnünk, hogy nem lehet két azonos számjegye a számnak. Vagyis $a$ és $b$ is 7-7 különböző értéket vehet fel. Tehát $2 \cdot 7 = 14$ megfelelő szám létezik.

2. Van 6 egyformán kinéző súlyunk, amelyek 1, 2, 3, 4, 5, 6 dekásak, és van 6 feliratunk ugyanezen értékekkel. Minden súlyra rákerült egy felirat, és tudjuk, hogy legalább 4 súlyra a helyes érték került. Hogyan lehet eldönteni egy kétkarú mérleg segítségével, két méréssel, hogy mind a 6 súlyra helyes felirat került-e?
(Egy mérés a következőt jelenti: a két serpenyőbe tetszőlegesen súlyokat helyezünk, majd leolvassuk, hogy az egyik serpenyőbe kisebb, nagyobb vagy ugyanakkora tömeget helyeztünk-e, mint a másikba.)

Mivel legalább 4 súlyra a helyes érték került, ha nem mindegyik felirat helyes, akkor két súly felirata felcserélődött. Tegyük fel a mérleg bal serpenyőjébe az 1 és 6, a jobb serpenyőbe a 2 és 5 dekás címkét viselő súlyokat. Ha a mérleg bármelyik irányba elbillen, akkor nem lehet mindegyik felirat helyes, ekkor készen vagyunk. Ha a mérleg egyenlőséget mutat, akkor csak az 1–6, 2–5, 3–4 párok valamelyikén lehet megcserélt felirat. Tegyük fel ekkor a mérleg bal serpenyőjébe az 1 és 4, a jobb serpenyőbe a 2 és 3 dekás címkét viselő súlyokat. Ha a mérleg bármelyik irányba elbillen, akkor nem lehet mindegyik felirat helyes. Ha a mérleg egyenlőséget mutat, akkor viszont a fent megadott párok egyikén sem lehet megcserélt felirat, ekkor tehát mindegyik felirat helyes.

*Megjegyzés.* Minden olyan méréspár jó, ahol az alábbi feltételek teljesülnek: (1) Mindkét mérésnél a címkék szerint azonos össztömeg van a serpenyőkben. (2) Nincs két olyan súly, amely mindkét mérésnél azonos helyre (azonos serpenyőbe vagy a mérlegen kívülre) kerül.

Ha valamelyik mérésnél nincs egyenlőség, akkor nem lehetnek jók a címkék. Ha fel lett cserélve két címke, akkor nem lesz egyenlőség annál a mérésnél, ahol ezek különböző helyen szerepelnek. Így pontosan akkor helyes minden felirat, ha mindkét mérésnél egyenlőséget kapunk.

Lehetséges azonban olyan méréspár is, ahol az egyik mérésnél nem egyenlőséget várunk. Például az 14–23 és 125–36 mérések esetén akkor és csak akkor helyesek a címkék, ha az első mérésnél egyenlőség van, a második mérésnél pedig a jobb serpenyő a nehezebb.

3. Felírtuk egy táblára a (pozitív egész) számokat 1-től 2016-ig. Egy lépésben valamelyik kettőt letöröltük, és **mindkettő helyett** felírtuk a két szám különbségeként kapható **nemnegatív** számot. Ezt a lépést néhányszor megismételtük, aminek következtében a táblán ugyanaz a szám szerepelt 2016-szor.
Add meg ennek a számnak az összes lehetséges értékét!

Vegyük észre, hogy bármely két számot kicserélve a különbségükre, majd a különségeket is kicserélve a különbségükre, mindkét szám helyén 0-t kapunk. Így lehetséges, hogy az összes számot nullára cseréljük, azaz a 0 szerepeljen 2016-szor a táblán. Ugyanakkor elérhető a fenti módon az is, hogy egyetlen $N$ szám kivételével az összeset 0-ra cseréljük. Ekkor $N$ és 0 helyett felírhatunk $N$-et kétszer, ily módon az összes nullát $N$-re cserélhetjük. Tehát az 1, 2, …2016 számok közül bármelyiket megtartva, a többit nullára, majd a megtartott számra cserélhetjük. Így ezen számok bármelyike lehet 2016 példányban a táblán. 0 és 2016 közötti számok (nemnegatív) különbségeként csak 0 és 2016 közötti szám állhat elő. Ezért a 2016-szor szereplő szám összes lehetséges értéke: 0, 1, …, 2016.

*Megjegyzés.* A 2016 bármely olyan $d$ osztójára, amelyre $2016/d$ páros, lehetséges az 1, 2, …, 2016 számokat $d$ különbségű párokba osztani. Így ezen párok helyett a különbségüket felírva csupa $d$ lesz a táblán.

4. Egy pozitív egész számot szépnek nevezünk, ha a 2, 3, 5, 7 számjegyek mindegyikét tartalmazza legalább egyszer, más számjegyet azonban nem. Egy szép számot csodaszépnek mondunk, ha a 7-szerese is szép szám.
a) Mutasd meg, hogy végtelen sok csodaszép szám van.
b) Mutasd meg, hogy egy csodaszép számban csak egy 7-es számjegy lehet.

Tekintsük a 753…325 alakú számokat, ahol a …helyén tetszőleges számú 3-as számjegy szerepel. Ezeknek a 7-szerese könnyen ellenőrizhetően 5273…275 alakú, ahol a …helyén 3-asok szerepelnek. Így a 753…325 alakú számok mind csodaszépek, tehát végtelen sok csodaszép szám van. Szorozzunk egy csodaszép számot írásban 7-tel. A 2, 3, 5, 7 számjegyeket 7-tel szorozva mindig 10-nél nagyobb számot kapunk, így minden számjegy szorzásánál keletkezik átvitel. Mivel $7 \cdot 7 = 49$, ezért a 7-es nem lehet utolsó számjegy, viszont ekkor az érkező átvitel miatt már nem 4-et, hanem 5-öt kell átvinni a következő számjegyhez. Ugyanakkor $2 \cdot 7 + 5 = 19$, $3 \cdot 7 + 5 = 26$, $5 \cdot 7 + 5 = 40$, $7 \cdot 7 + 5 = 54$ mindegyike olyan jegyre végződik, ami szép számban nem szerepelhet. Így a 7-es számjegy előtt egy csodaszép számban nem lehet másik számjegy, tehát legfeljebb egy 7-es számjegy szerepelhet benne.

*Megjegyzés.* A feladat nem kérte, hogy az összes csodaszép számot megadjuk. Megmutatható azonban, hogy a csodaszép számok az alábbiak:

$$75\underbrace{3\ldots3}_{a_1\text{ db}}\underbrace{2\ldots2}_{b_1\text{ db}}5\underbrace{3\ldots3}_{a_2\text{ db}}\underbrace{2\ldots2}_{b_2\text{ db}}\ldots 5\underbrace{3\ldots3}_{a_k\text{ db}}\underbrace{2\ldots2}_{b_k\text{ db}}5,$$

ahol az $a_1, \ldots, a_k$ és $b_1, \ldots, b_k$ darabszámok mindegyike legalább 1, és legalább egy $a_i$ nagyobb 1-nél. Utóbbi feltétel azért szükséges, mert ha nincs két egymást követő 3-as számjegy, akkor a szám 7-szeresében nem lesz 3-as számjegy.

## 7. osztály, 1. nap — Országos döntő

1. Sárkányországban minden sárkánynak legalább 3 feje van. Azok a sárkányok, amelyeknek páratlan sok fejük van, mindig igazat mondanak, amelyeknek páros sok, mindig hazudnak. Négy sárkány éppen bridzselt, amikor megkérdezték őket, hogy négyüknek összesen hány fejük van. A következő válaszok érkeztek: 14, 15, 16, 20. Hány feje van összesen az igazmondó sárkányoknak? Add meg az összes lehetőséget!

Elképzelhető, hogy egyetlen igazmondó sincs közöttük, és a fejeik száma 4 olyan páros szám, amelyeknek az összege se nem 14, se nem 16, se nem 20. Például lehet mindnek 8 feje. Ha van köztük igazmondó, akkor legfeljebb egy lehet, mert minden válasz különböző. Vagyis egy sárkány van, amelynek páratlan számú feje van és három, amelynek páros. A fejeik számának összege tehát páratlan. Vagyis összesen 15 fejük van. A hazug sárkányoknak legalább 4, az igazmondóknak legalább 3 feje van, így három hazug és egy igazmondó sárkánynak legalább 15 $(3 + 4 + 4 + 4)$ feje van. Tehát csak az képzelhető el, hogy a hazug sárkányoknak pontosan 4, az egyetlen igazmondónak pontosan 3 feje van, vagyis a válasz **0 vagy 3**.

2. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyikét pontosan egyszer felhasználva felírtunk öt pozitív egész számot. Hány négyzetszám lehet ezek között? Adj minden lehetőségre példát!
(Négyzetszámnak nevezzük azokat az egész számokat, amelyek megkaphatók egy egész szám önmagával vett szorzataként.)

Lehetséges, hogy nincs közöttük négyzetszám, pl.: **12, 34, 5, 67, 89**. Lehetséges, hogy 1 négyzetszám van közöttük, pl.: **1** $(= 1^2)$**, 23, 45, 67, 89**. Lehetséges, hogy 2 négyzetszám van közöttük, pl.: **1** $(= 1^2)$**, 4** $(= 2^2)$**, 23, 56, 789**. Lehetséges, hogy 3 négyzetszám van közöttük, pl.: **1** $(= 1^2)$**, 4** $(= 2^2)$**, 9** $(= 3^2)$**, 23, 5678**. Lehetséges, hogy 4 négyzetszám van közöttük, pl.: **1** $(= 1^2)$, **4** $(= 2^2)$, **9** $(= 3^2)$, **25** $(= 5^2)$, **3678**. Lehetséges, hogy mind az 5 négyzetszám, pl.: **1** $(= 1^2)$, **9** $(= 3^2)$, **25** $(= 5^2)$, **36** $(= 6^2)$, **784** $(= 28^2)$.

3. Az $a, b, c, d$ pozitív valós számokról a következőket tudjuk:
(1) $a : (b : c : d) = 72$
(2) $a : (b : c) : d = 8$
(3) $a : b : (c : d) = 4{,}5$.
Mennyi lehet $a : b : c : d$ értéke?

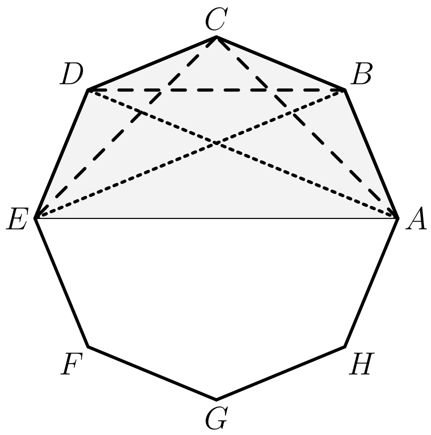
Tudjuk, hogy $a : (b : c : d) = 72$, amiből következik, hogy $\frac{acd}{b} = 72$.
Mivel $a : (b : c) : d = 8$, ezért $\frac{ac}{bd} = 8$.
Végül pedig tudjuk, hogy $a : b : (c : d) = 4{,}5$, vagyis $\frac{ad}{bc} = 4,5$. Az első két egyenletet elosztva egymással azt kapjuk, hogy $d^2 = 9$. Mivel a számok pozitívak, így $d = 3$. Az első egyenletet a harmadikkal osztva azt kapjuk, hogy $c^2 = 16$, azaz $c = 4$. Felhasználva ezt a két értéket és a második egyenletet: $\frac{a}{b} = 6$. Ekkor viszont a keresett $a : b : c : d = 6 : 4 : 3 = \frac{1}{2}$.
Ezek az arányok létre is jöhetnek, ha mondjuk $a = 6$, $b = 1$, $c = 4$ és $d = 3$.

4. Egy kör mentén elhelyeztünk néhány pozitív egész számot. Tudjuk, hogy bármely két szomszédos szám közül az egyik osztója a másiknak, ugyanakkor a nem szomszédos számpárok egyike sem áll osztó-többszörös viszonyban. Lehetséges-e, hogy a körön elhelyezett számok száma 20?

Legyen $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{10}$ tíz darab különböző prímszám. (Például $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$.) Legyenek a a kör mentén a számok sorban: $p_1, p_1p_2, p_2, p_2p_3, p_3, p_3p_4, p_4, \ldots, p_9, p_9p_{10}, p_{10}, p_{10}p_1$. Ez az elhelyezés megfelel a feladat feltételeinek. A szomszédos számok közül az egyik két prímszám szorzata, mégpedig a két szomszédjának a szorzata. Ebből következik, hogy bármely két szomszédos szám osztó-többszörös viszonyban van, a prím osztója annak, ami két prím szorzata.
Ha két szám nem szomszédos, akkor nem lehetnek osztó-többszörös viszonyban.
Ugyanis három eset képzelhető el két nem szomszédos számra:
1) Két különböző prím. Ezek közül egyik sem oszthatja a másikat. 2) Egy prím ($p_i$) és egy másik, ami két prím szorzata ($p_np_m$). Mivel $p_i$ csak a két szomszédjában szerepel prímtényezőként, és a két szám nem szomszédos, ezért $p_n$ és $p_m$ egyike sem $p_i$, ezért egyik sem osztója a másiknak. 3) Két szám, amik 2-2 prím szorzatai, $p_ip_j$ és $p_mp_n$, ahol $i, j, m, n$ között lehet kettő, amik egyenlők. Mivel legfeljebb az egyik prímtényezőjük közös, ezért mindkét számban szerepel olyan prímtényező, ami a másikban nem, így egyik szám sem lehet osztója a másiknak.

5. Peti rajzolt egy ötszöget. Ezután meghatározta az oldalak és az átlók hosszát. Lehetséges-e, hogy ezekre pontosan négy különböző értéket kapott úgy, hogy az egyik érték egyszer, a másik kétszer, a harmadik háromszor, a negyedik négyszer fordult elő?

*Első megoldás.* Legyen $ABCDEFGH$ egy szabályos nyolcszög, ekkor az $ABCDE$ ötszög megfelelő. A szabályos nyolcszögben a szimmetriák miatt minden oldal, minden másodszomszédos csúcsot összekötő átló, minden harmadszomszédos csúcsot összekötő átló, valamint minden negyedszomszédos (átellenes) csúcsot összekötő átló is egyenlő hosszúságú. A fenti távolságok ráadásul egymástól mind különbözőek.

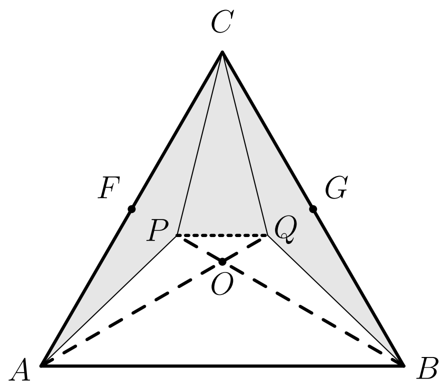



Így $AB = BC = CD = DE < AC = BD = CE < AD = BE < AE$, tehát az $ABCDE$ ötszög valóban teljesíti a feltételeket.

*Megjegyzés.* Szabályos nyolcszög helyett bármely $n$ oldalú szabályos sokszög 5 szomszédos csúcsa megfelelő ötszöget alkot, ha $n \geq 8$ (kisebb oldalszám esetén nem lesz 4 különböző hosszúság).

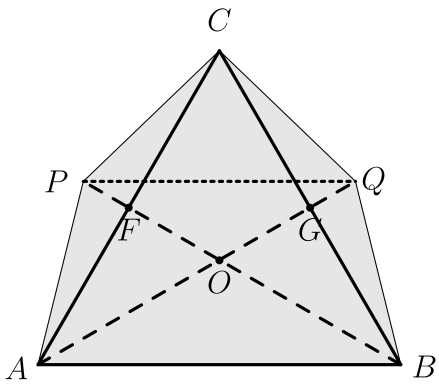
Ugyancsak megfelel a fenti nyolcszögben az $ACDFG$ ötszög, vagy a nyolcszög köré írható kör $O$ középpontjával az $ABCDO$ ötszög.

*Második megoldás.* Legyen $ABC$ egy szabályos háromszög, az $AC$ és $BC$ oldalak felezőpontjai $F$ és $G$, a felezőmerőlegesek metszéspontja $O$. Legyen továbbá $P$ az $FO$, $Q$ pedig a $GO$ szakasz felezőpontja. Ekkor az $APQBC$ ötszög megfelel a feltételeknek.




$AB = BC = CA$, mivel ezek a szabályos háromszög oldalai. Mivel $P$ rajta van az $AC$ oldal felezőmerőlegesén, ezért $AP = PC$, de a szimmetria miatt ezek $BQ$-val és $QC$-vel is egyenlők, ez 4 egyenlő szakasz. Ugyancsak a szimmetria miatt $AQ = BP$. Látható, hogy nincs több egyenlőség a szakaszok között ($PQ < AP = PC = BQ = QC < AQ = BP < AB = BC = AC$), ezért az $APQBC$ ötszög valóban teljesíti a feltételeket.

*Megjegyzés.* A felezőmerőlegeseken máshol is felvehetnénk (szimmetrikusan) a $P$ és $Q$ pontokat, az egyenlőségek akkor is fennállnak. Arra kell ügyelni, hogy létrejöjjön 4 különböző távolság, illetve megrajzolható legyen az ötszög.



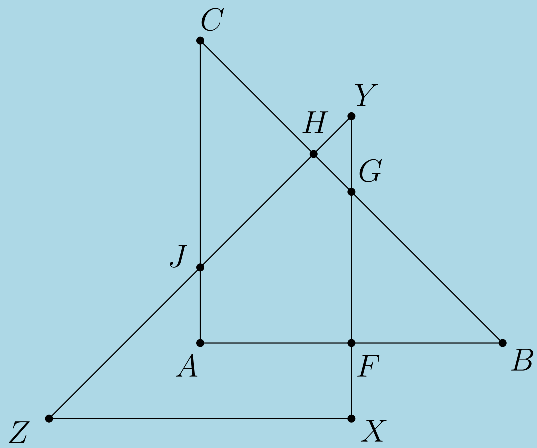

7. osztály, 2. nap

Országos döntő

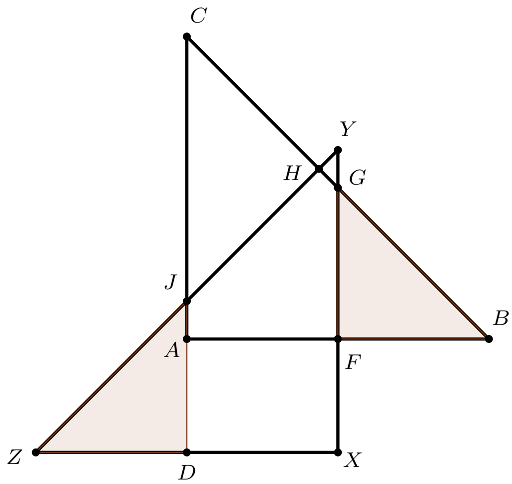
1. Egy négyjegyű szám minden számjegye különböző. Azt is tudjuk, hogy ha az első számjegyet elhagyjuk, akkor egy 9-cel osztható, ha a másodikat, akkor egy 2-vel osztható, ha a harmadikat, akkor egy 5-tel osztható, ha a negyediket, akkor egy 4-gyel osztható háromjegyű számot kapunk. Hány ilyen négyjegyű szám van?

Az utolsó számjegy páros, hiszen, ha a második számjegyet elhagyjuk, akkor páros számot kapunk. Másrészt 5-tel is osztható az utolsó számjegy, hiszen a harmadik számjegyet elhagyva 5-tel osztható számot kapunk. Vagyis az utolsó számjegy 0. Mivel az első számjegyet elhagyva 9-cel osztható számot kapunk, ezért az utolsó három számjegy összege 9-cel osztható. Mivel az utolsó 0, ezért a középső két számjegy összege osztható 9-cel. Az utolsó számjegyet elhagyva 4-gyel osztható számot kapunk, vagyis a középső két számjegyet tekintve egy 4-gyel osztható számot kapunk. Ez a kétjegyű szám a korábbiak miatt 9-cel is osztható, így csak 36 és 72 lehet. Vagyis a szám $\overline{a360}$ vagy $\overline{b720}$ alakú. Az első számjegytől függetlenül most már minden feltétel teljesülni fog, tehát csak arra kell figyelnünk, hogy nem lehet két azonos számjegye a számnak. Vagyis $a$ és $b$ is 7-7 különböző értéket vehet fel. Tehát $2 \cdot 7 = 14$ megfelelő szám létezik.

2. Egy 4 cm oldalú négyzetet kettévágtunk az átlója mentén, majd a kapott $ABC$ és $XYZ$ háromszögeket az ábra szerint helyeztük el. Az $AB$ és $XZ$ szakaszok párhuzamosak, $F$ pedig éppen az $AB$ szakasz felezőpontja. Tudjuk, hogy a $CHJ$ háromszög területe $3\text{ cm}^2$-rel nagyobb a $GHY$ háromszög területénél. Milyen hosszú az $FX$ szakasz?




*Első megoldás.* Hosszabbítsuk meg az $AC$ szakaszt, $A$-n túl, és legyen $D$ az a pont, ahol elmetszi az $XZ$ oldalt.



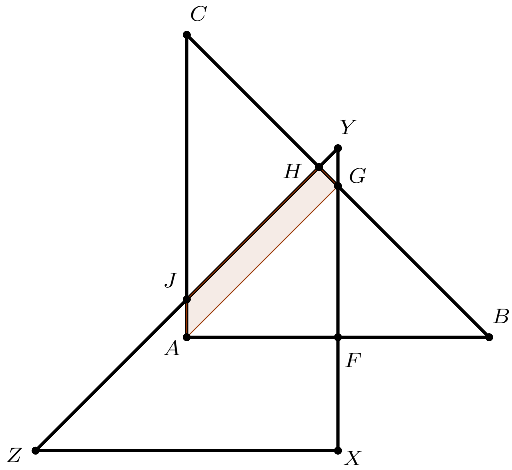

Írjuk fel a két háromszög területét, amikről tudjuk, hogy egyenlők: $T_{ABC} = T_{FBG} + T_{CHJ} + T_{AFGHJ}$, illetve $T_{XYZ} = T_{DJZ} + T_{DXFA} + T_{GHY} + T_{AFGHJ}$. Tudjuk, hogy $T_{CHJ} - T_{GHY} = 3\,\text{cm}^2$, ezért:

$$T_{FBG} + 3 = T_{DJZ} + T_{DXFA}.$$

$FBG$ és $DJZ$ háromszögek derékszögűek, egyenlő szárúak, és a befogójuk azonos hosszúságú, ezért egyenlő a területük. Vagyis $T_{DXFA} = 3$. Mivel $AC \parallel XY$ és $AB \parallel XZ$, és $DXF\sphericalangle$ derékszög, ezért $DXFA$ téglalap. Tudjuk, hogy $AF = 2$, amiből következik, hogy a kérdésben szereplő $FX$ szakasz hossza $\frac{3}{2}$.

*Második megoldás.* Az ábrán látható egyenlő szárú, derékszögű háromszögek miatt $AF = FB = GF = 2$, illetve $GB = GA = GC = 2\sqrt{2}$. Egészítsük ki a $GHY$ és a $CHJ$ háromszöget is az $AGHJ$ négyszöggel. Ekkor tudjuk, hogy

$$T_{CGA} - T_{AGYJ} = 3.$$




Mivel $T_{CGA} = 4$, ezért $T_{AGYJ} = 1$. Másrészt viszont $T_{AGYJ} = AG \cdot GH$, amiből kapjuk, hogy $GH = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Ebből pedig következik, hogy $GY = \frac{1}{2}$. Vagyis $FX = XY - GY - FG = 4 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{3}{2}$.

3. Egy $n \times n$-es négyzetrács bal felső sarokmezője fekete, a többi fehér. Minden lépésben kiválaszthatunk egy olyan fehér mezőt, amelynek páratlan számú fekete oldalszomszédja van, és beszínezhetjük feketére. Elérhető-e ilyen lépésekkel, hogy minden mező fekete legyen, ha

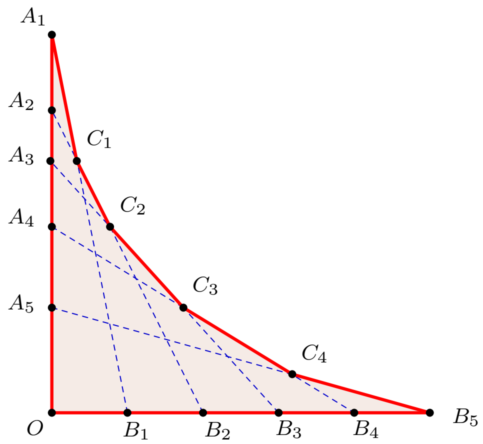
a) $n = 7$?

b) $n = 8$?

Az a) esetben egy megfelelő színezés: felülről lefelé haladva színezzük be az első oszlop összes mezőjét feketére. Ezután balról jobbra haladva színezzük be az 1., a 3., az 5. és a 7. sor mezőit feketére. (Eddig minden lépésben olyan mezőt színeztünk feketére, melynek egy fekete oldalszomszédja volt). Végül balról jobbra haladva színezzük feketére a 2., 4. és 6. sor mezőit (most pedig minden feketére színezett mezőnek három fekete oldalszomszédja volt). A b) eset lehetetlensége: vizsgáljuk a fekete mezőkből álló alakzat kerületét. Ez a kerület kezdetben 4, és minden lépésben kettővel nő vagy kettővel csökken. (Ha egy fekete szomszédja volt az új fekete mezőnek, kettővel nő, ha három fekete szomszédja volt az új fekete mezőnek, kettővel csökken.) Ha minden mezőt feketére lehetne színezni, 63 lépést kéne tennünk. Mivel két lépést téve a kerület változása -4, 0 vagy +4, így 62 lépés után a fekete mezőkből álló alakzat kerülete osztható 4-gyel, 63 lépés után pedig 4-gyel osztva 2 maradékot ad. Így nem lehet egyenlő a négyzet kerületével, $4 \cdot 8 = 32$-vel, tehát nem lehet minden mezőt feketére színezni.

4. Van-e olyan 2016 oldalú sokszög, amelynek bármely két oldalegyenese metszi egymást, és minden metszéspont a sokszög belsejében vagy határán található?

Vegyük fel az $O$ pontból kiinduló egymásra merőleges félegyeneseket. Vegyünk fel mindkét félegyenesen egy-egy pontot, legyenek ezek $A_1$ és $B_1$. Vegyünk fel egy $A_2$ pontot az $OA_1$ szakaszon és egy $B_2$ pontot a $B_1$-től jobbra az $OB_1$ egyenesen. Kössük össze az $A_1$ és a $B_1$ pontokat, illetve az $A_2$ és a $B_2$ pontokat. Legyen a metszéspontjuk $C_1$. Ezt követően legyen a $C_1$ pont merőleges vetülete az $OA_1$-re $A_3$. Vegyük fel $B_3$-at az $OB_1$ egyenesen $B_2$-től jobbra. Ekkor az $A_3B_3$ szakasz metszeni fogja $A_2B_2$ szakaszt. Legyen a metszéspont $C_2$. Legyen $A_4$ a $C_2$ merőleges vetülete az $OA_1$ egyenesen. Folytassuk tovább ezt az eljárást. Az ábrán látható $OA_1C_1C_2C_3C_4B_5$ sokszög megfelelő példa hétszögre. Hasonló módon konstruálható meg egy $OA_1C_1C_2\dots C_{2013}B_{2014}$ sokszög melynek 2016 csúcsa van és megfelel a feladat feltételeinek.




Miért jó ez a konstrukció? Nézzük sorra az $OA_1B_1$, $OA_1C_1B_2$, $OA_1C_1C_2B_3$, $\dots OA_1C_1C_2 ... C_{2013}B_{2014}$ sokszögeket. Az $OA_1B_1$ háromszögre nyilván igaz, hogy minden metszéspont belül vagy a határon van. Az $i$-edik lépésben az előző sokszöget egyesítjük az $OA_{i+1}B_{i+1}$ háromszöggel, ezáltal megmaradnak az eddigi oldalegyenesek, és hozzájuk adódik az $A_{i+1}B_{i+1}$ egyenes. Minden belül vagy határon lévő pont továbbra is belső vagy határon lévő pont marad. Új metszéspontok az $A_{i+1}B_{i+1}$ egyenesen keletkeznek. A korábbi oldalegyenesek az $OA_{i+1}B_{i+1}$ háromszöget az $OA_{i+1}$ oldalon nem metszhetik $A_{i+1}$ választása miatt, az $OB_{i+1}$ oldalon viszont metszik $B_{i+1}$ választása miatt. Ezért ezeknek a háromszöget az $A_{i+1}B_{i+1}$ oldalon is metszeniük kell. Tehát az $A_{i+1}B_{i+1}$ egyenesnek a korábbiakkal vett metszéspontjai mind az $A_{i+1}B_{i+1}$ szakaszra esnek, amelynek viszont minden pontja az új sokszög belsejében vagy határán van. Tehát ha az $i$-edik sokszögre teljesült a feltétel, akkor az $i+1$-edikre is, így végül az $OA_1C_1C_2 ... C_{2013}B_{2014}$ sokszög is teljesíti a feltételt.

**8. osztály, 1. nap** — **Országos döntő**

1. Sárkányországban minden sárkánynak legalább 3 feje van. Azok a sárkányok, amelyeknek páratlan sok fejük van, mindig igazat mondanak, amelyeknek páros sok, mindig hazudnak. Négy sárkány éppen bridzselt, amikor megkérdezték őket, hogy négyüknek összesen hány fejük van. A következő válaszok érkeztek: 14, 15, 16, 20. Hány feje van összesen az igazmondó sárkányoknak? Add meg az összes lehetőséget!

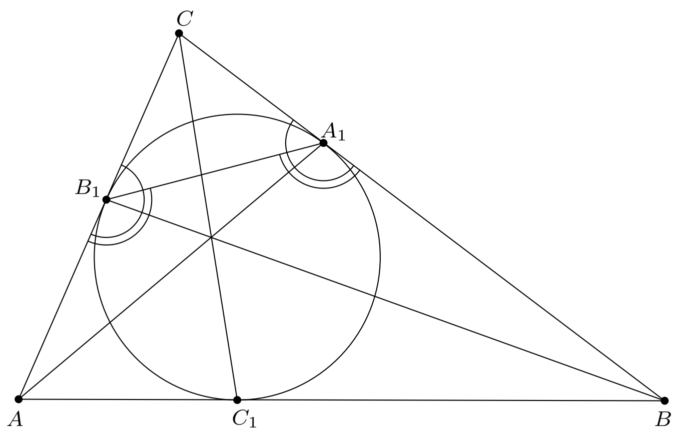
Elképzelhető, hogy egyetlen igazmondó sincs közöttük, és a fejeik száma 4 olyan páros szám, amelyeknek az összege se nem 14, se nem 16, se nem 20. Például lehet mindnek 8 feje. Ha van köztük igazmondó, akkor legfeljebb egy lehet, mert minden válasz különböző. Vagyis egy sárkány van, amelynek páratlan számú feje van és három, amelynek páros. A fejeik számának összege tehát páratlan. Vagyis összesen 15 fejük van. A hazug sárkányoknak legalább 4, az igazmondóknak legalább 3 feje van, így három hazug és egy igazmondó sárkánynak legalább 15 $(3+4+4+4)$ feje van. Tehát csak az képzelhető el, hogy a hazug sárkányoknak pontosan 4, az egyetlen igazmondónak pontosan 3 feje van, vagyis a válasz **0 vagy 3**.

2. Egy kör mentén elhelyeztünk $n$ darab pozitív egész számot úgy, hogy bármely két szomszédos szám közül az egyik osztója a másiknak, ugyanakkor a nem szomszédos számpárok egyike sem áll osztó-többszörös viszonyban.
Döntsük el, hogy a $3 \leq n \leq 20$ számok közül melyekre lehetséges ez.

Belátjuk, hogy ha $n \geq 4$ páratlan szám, nem lehetséges, egyébként pedig lehetséges. Először tekintsük azt az esetet, ha $n \geq 4$ páratlan. Tekintsük a kör mentén a szomszédokból alkotott párokat. Ilyen párból is $n$ darab van. Színezzünk egy ilyen $(a, b)$ párt pirosra, ha $a|b$, kékre, ha $b|a$ ($a$ jelöli a pár azon tagját, amely az óramutató járása szerint körbejárva korábban szerepel). (Ha $a = b$, válasszunk a piros és a kék szín közül tetszés szerintit.) Mivel páratlan sok ($n$ darab) párunk van, kell lennie két szomszédos párnak, melyek azonos színt kapnak. Ha ez a két pár $(a, b)$ és $(b, c)$, akkor az azonos szín miatt vagy $a|b$ és $b|c$, és ekkor $a|c$, vagy $c|b$ és $b|a$, ekkor pedig $c|a$: mindkét esetben ellentmondást kaptunk, hiszen $c$ és $a$ nem szomszédos (itt kell, hogy $n \geq 4$).
Most legyen $n = 3$: egy jó kitöltés, ha mindhárom szám egyforma.
Ha $n = 4$, akkor a $2, 30, 3, 42$ számok megfelelnek a feladat feltételeinek. Legyen ezután $n \geq 6$ páros. Legyen $k = n/2$. Vegyünk $k$ darab különböző prímszámot, legyenek ezek $p_1$, $p_2$,..., $p_k$. (Nem kell hivatkozni arra, hogy végtelen sok prímszám van, hiszen $n \leq 20$, azaz 10 különböző prímszám elegendő.) Ezután egy jó kitöltés az óramutató járása szerint körbejárva: $p_1$, $p_1p_2$, $p_2$, $p_2p_3$,..., $p_k$, $p_kp_1$.

3. Az $ABC$ háromszög oldalait a beírt köre az $A_1$, $B_1$, $C_1$ pontokban érinti (az $A_1$ pont a $BC$, a $B_1$ pont az $AC$, a $C_1$ pont az $AB$ oldalán található). Bizonyítsd be, hogy ha $AA_1 = BB_1 = CC_1$, akkor a háromszög szabályos.

*Első megoldás.*




Belátjuk, hogy az $AB_1A_1$ és a $BA_1B_1$ háromszögek egybevágók.
A két háromszögben $AA_1 = BB_1$ a feladat feltétele alapján, az $A_1B_1$ oldal pedig közös. Vegyük még észre, hogy a $CA_1B_1$ háromszögben $CA_1 = CB_1$, mert az egy pontból húzott érintő szakaszok egyforma hosszúak. Ekkor viszont $CA_1B_1\sphericalangle = CB_1A_1\sphericalangle$, azaz kiegészítő szögeik is egyenlők: $AB_1A_1\sphericalangle = BA_1B_1\sphericalangle$, és nagyobbak mint 90°, azaz $AA_1$ és $BB_1$ hosszabb

oldal, mint $A_1B_1$: vagyis a két háromszög egybevágó. Ezek szerint $AB_1 = BA_1$, továbbá láttuk, hogy $CA_1 = CB_1$, ezeket összerakva tehát $CA = CB$. Mivel a csúcsoknak a feladatban nincs kitüntetett szerepe, így $AB = AC$-nek is teljesülnie kell, és ez volt a bizonyítandó. *Második megoldás.* Tekintsük az $AB_1B$ és a $AC_1C$ háromszögeket. A két háromszögben $BB_1 = CC_1$ a feladat feltétele alapján, továbbá $AB_1 = AC_1$, mert az egy pontból húzott érintő szakaszok egyforma hosszúak. Közös továbbá a két háromszög $A$ csúcsnál lévő szöge. Nem nehéz meggondolni, hogy a két háromszög egybevágó, vagy a $B_1$ és $C_1$ csúcsnál lévő szögeik 180°-ra egészítik ki egymást. Az első esetben $AB = AC$, a második esetben pedig egyszerű szögszámolás mutatja, hogy $\alpha = 60°$. Ezt minden csúcsnál eljátszhatjuk (az $A$ helyett). Így a következő lehetőségeink vannak: mindhárom-szor azt kapjuk, hogy az adott csúcsnál lévő szög 60°, azaz a háromszög szabályos, készen vagyunk; mindhárom-szor azt kapjuk, hogy a csúcsból induló két oldal egyforma hosszú, azaz mindhárom oldal egyforma hosszú. a háromszög szabályos; végül a két eset vegyesen fordul elő, ekkor pedig a háromszög egyenlő szárú háromszög, melynek van 60°-os szöge, ami csak úgy lehetséges, ha szabályos. (Skatulyaelvvel is érvelhetünk: hiszen ha már kétszer azt kaptuk, hogy a csúcsnál lévő szög 60°, illetve a csúcsból induló oldalak egyforma hosszúak, már akkor is szabályos a háromszög). Ezzel a feladat állítását beláttuk. *Megjegyzés.* A fenti megoldások azt az egybevágósági alapesetet használják, amikor két oldal és az egyikkel szemközti szög van megadva: figyelni kell arra, hogy ekkor még nem feltétlenül egybevágók a háromszögek, csak ha pl. az is be van látva, hogy a két oldallal közül a nagyobbal szemközti szög az adott.

4. Egy számból kivonjuk a számjegyeinek összegét. Hányféle különböző számot kapunk, ha az előző eljárást végrehajtjuk az összes háromjegyű számon?

Legyen egy háromjegyű szám $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. A műveletet végrehajtva az eredmény: $100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b)$. Vegyük észre, hogy $11a + b$ minden $(a, b)$ számjegykombináció esetén más eredményt ad, hiszen ha $11a_1 + b_1 = 11a_2 + b_2$, akkor $11(a_1 - a_2) = b_2 - b_1$. $b_2 - b_1$ két számjegy különbségeként -9 és 9 közé esik, és oszható 11-gyel: így muszáj 0-nak lennie. Ekkor persze $a_1 - a_2$ szintén 0, azaz $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$, ugyanarról a számjegypárról van szó. Így tehát a feladat kérdésére a válasz: $9 \cdot 10 = 90$.

5. Keresd meg az összes olyan (végtelen) számtani sorozatot, amely teljesíti a következő feltételeket:
(i) a sorozat tagjai pozitív egész számok,
(ii) a sorozat minden tagja nagyobb, mint az őt megelőző tagok,
(iii) ha egy szám tagja a sorozatnak, akkor a számjegyeinek összege is tagja a sorozatnak.
(Egy számtani sorozatban bármely két egymást követő tag különbsége állandó.)

A megfelelő sorozatok: az összes pozitív egész, 3-mal osztva egy adott maradékot adó számok, illetve 9-cel osztva egy adott maradékot adó számok. Az elsőről világos, hogy megfelelő, a hármas differenciájúak azért jók, mert egy szám és a számjegyeinek összege ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva, és hasonló igaz 9 esetén is. (Ha van legalább egy jó példa a pozitív egészeken kívül, a versenyző mindenképp kapjon 1 pontot.) Bebizonyítjuk, hogy nincs más megfelelő sorozat.
Vegyük a sorozat egy tetszőleges tagját. Bebizonyítjuk, hogy a tag kilences maradéka is szerepel a sorozatban (ha a tag osztható 9-cel, akkor a 9 szerepel). Vegyük az ugyanekkora

maradékot adó tagok közül a legkisebbet. Ha ez egyjegyű, készen vagyunk. Ha nem, akkor vegyük a számjegyeinek összegét: ez a szám ugyanazt a 9-es maradékot adja, mint az eredeti tag, de kisebb nála, és a feladat feltétele alapján szerepelnie kéne a sorozatban: ellentmondás. (Ha hasonló gondolatmenettel valaki annyit lát be, hogy a sorozat első tagja egyjegyű, ez a rész 1 pontot ér.) Belátjuk, hogy a sorozat differenciája egyjegyű. Legyen $d$ a differencia, és tegyük fel, hogy legalább kétjegyű. A sorozat első (az előzőek alapján egyjegyű) tagja legyen $a$. $d$ jegyeinek összege legyen $0 < e < d$. A sorozatban szerepel $a + 10d$, melyben a jegyek összege $a + e$, de ez a szám a sorozat két szomszédos tagja, $a$ és $a + d$ közé esik, ami ellentmondás. Innentől végig kell nézni (módszeresen vagy kevésbé módszeresen) a lehetséges eseteket.
Ha sorozat differenciája nem osztható 3-mal, akkor a sorozatban minden 9-es maradék elő fog fordulni, így a sorozatnak tagja lesz az 1 és a 2 is, azaz minden pozitív egész.
Ha sorozat differenciája 3, akkor a kétjegyű számoktól kezdve az összes adott hármas maradékú számot tartalmazni fogja a sorozat, azaz benne lesz a 10, a 20 vagy 30, és így az 1, a 2 vagy a 3 is.
Ha a sorozat differenciája 6, akkor a kétjegyű számoktól kezde az összes adott hatos maradékú számot tartalmazni fogja a sorozat. Ha ez a maradék 1, akkor tagja lesz a 13, de abban a számjegyek összege 4, ellentmondás. Ha a maradék a 2, akkor tagja lesz a 14, de abban a számjegyek összege 5, ellentmondás. A többi esetben is hasonló ellentmondást kapunk, tehát a differencia nem lehet 6.
Ha sorozat differenciája 9, akkor pedig az összes adott 9-es maradékú számot megkapjuk, és ezek a sorozatok meg is felelnek a feladat feltétele-inek. Ezzel bebizonyítottuk, hogy nincs más lehetőség, mint az elején felsorolt sorozatok. (A feladatra természetesen akkor is jár a teljes pontszám, ha a versenyző belátja, hogy az első tag és a differencia is egyjegyű, és az adódó véges sok lehetőséget végignézi.)

## 8. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. Három egymást követő háromjegyű számot (az eredeti sorrendjükben) egymás után írunk, így egy kilencjegyű számot kapunk. Igaz-e, hogy az így kapott szám mindig osztható 3-mal?

*Első megoldás.* Bebizonyítjuk, hogy a kapott szám mindig osztható hárommal. Legyen a három egymást követő háromjegyű szám $n$, $n + 1$, $n + 2$. Ekkor a kilencjegyű szám így írható fel: $1000000n + 1000(n + 1) + (n + 2)$. Átalakítva azt kapjuk, hogy ez a szám: $1001001n + 1002$. Mivel 1001001 és 1002 is osztható 3-mal, az állítást bebizonyítottuk.

*Második megoldás.* A feladat állítása igaz tetszőleges három egymást követő számra, és az egymás után írás sorrendje se számít. A kapott számban a számjegyek összege megegyezik az eredeti három szám számjegyeinek összegével. Mivel egy számban a számjegyek összege megegyezik a szám hármas maradékával, így a három egymást követő szám számjegyei összegeinek hármas maradékai 0, 1 és 2 (valamilyen sorrendben). Így a számjegyek összegei összegének hármas maradéka $0 + 1 + 2 = 3$, azaz osztható 3-mal. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

*Harmadik megoldás.* A feladat állítása igaz tetszőleges három egymást követő számra, és az egymás után írás sorrendje se számít. Csak annyit kell észrevenni, hogy ha egy szám mögé nullákat írunk, a szám hármas maradéka nem változik meg, hiszen 10-nek egy hatványával szoroztuk meg, ami mindig 1 maradékot ad 3-mal osztva (hivatkozhatunk a 3-as oszthatósági szabályra is). A számok egymás után írásával kapott számot úgy is előállíthatjuk, hogy az eredeti számaink mögé megfelelő számú nullát írunk, és az így kapott három számot összeadjuk. Tehát ha a három egymást követő szám $n$, $n+1$ és $n+2$, akkor a feladatban előállított szám hármas maradéka ugyanaz, mint $n+(n+1)+(n+2)$ hármas maradéka. Mivel ez a szám $3n+3$, mindig osztható hárommal, és ez volt a bizonyítandó.

2. Egy $8\times 8$-as pontrács pontjait két játékos felváltva köti össze szakaszokkal. Két szakasznak nem lehet közös pontja. (A végpontjuk sem lehet közös.) Aki nem tud lépni, veszít. Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája? Ha igen, adj is meg egy nyerő stratégiát.

A kezdő játékosnak van nyerő stratégiája. A kezdő játékos összeköt két olyan pontot, melyek közép-pontosan szimmetrikusak a pontrács középpontjára. Ezután a kezdő játékos mindig középpontosan tükrözi a második játékos lépését. Be kell látnunk, hogy így mindig szabályosat fog lépni. A második játékos lépésével nem lehet közös pontja az első játékos lépésének. Tegyük fel, hogy lenne, a $P$ pont. Ekkor $P$ tükörképe a középpontra, $P'$ is közös pont. Ekkor azonban a $PP'$ szakasz minden pontja közös pont, vagyis a tükrözés középpontja is. A tükrözés középpontja azonban nem lehet közös pont, mert azt tartalmazza az elsőnek megrajzolt szakasz, így már a második játékos lépése is szabálytalan lett volna. A korábbi szakaszokkal pedig azért nem lehet közös pontja az első játékos lépésének, mert azokra teljesül, hogy ha egy szakasz be van rajzolva, akkor a középpontra vett tükörképe is, tehát akkor a második játékos lépésének is lenne közös pontja egy korábban megrajzolt szakasszal.

**Megjegyzés.** A leírt megoldás csak középpontos tükrözéssel működik, tengelyessel nem, ugyanis a megoldás során kulcsfontosságú volt, hogy ha egy szakasz és a képének van közös pontja, akkor a transzformáció fixpontja is közös pont, de abból végtelen sok van a tengelyes tükrözénél. Persze a tengelyes tükrözés is működik, de fontos, hogy az elsőnek választott szakasz a tengelynek a pontrácsba eső szakasza legyen, és ezzel le legyen fedve az összes fixpont.

3. Egy $n\times n$-es négyzetrács bal felső sarokmezője fekete, a többi fehér. Minden lépésben kiválaszthatunk egy olyan fehér mezőt, amelynek páratlan számú fekete oldalszomszédja van, és beszínezhetjük feketére. Elérhető-e ilyen lépésekkel, hogy minden mező fekete legyen, ha

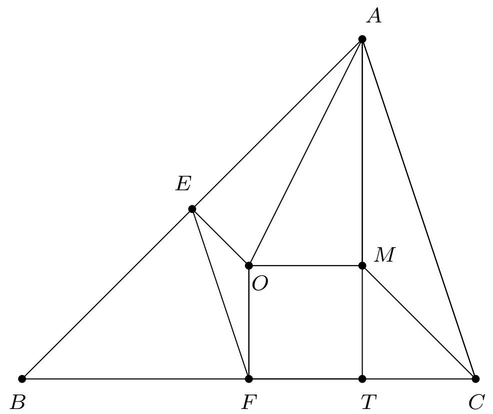
a) $n=7$?

b) $n=8$?

Az a) esetben egy megfelelő színezés: felülről lefelé haladva színezzük be az első oszlop összes mezőjét feketére. Ezután balról jobbra haladva színezzük be az 1., a 3., az 5. és a 7. sor mezőit feketére. (Eddig minden lépésben olyan mezőt színeztünk feketére, melynek egy fekete oldalszomszédja volt). Végül balról jobbra haladva színezzük feketére a 2., 4. és 6. sor mezőit (most pedig minden feketére színezett mezőnek három fekete oldalszomszédja volt). A b) eset lehetetlensége: vizsgáljuk a fekete mezőkből álló alakzat kerületét. Ez a kerület kezdetben 4, és minden lépésben kettővel nő vagy kettővel csökken. (Ha egy fekete szomszédja volt az új fekete mezőnek, kettővel nő, ha három fekete szomszédja volt az új fekete mezőnek, kettővel csökken.) Ha minden mezőt feketére lehetne színezni, 63 lépést kéne tennünk. Mivel két lépést téve a kerület változása -4, 0 vagy +4, így 62 lépés után a fekete mezőkből álló alakzat kerülete osztható 4-gyel, 63 lépés után pedig 4-gyel osztva 2 maradékot ad. Így nem lehet egyenlő a négyzet kerületével, $4 \cdot 8 = 32$-vel, tehát nem lehet minden mezőt feketére színezni.

4. A hegyesszögű $ABC$ háromszög magasságpontja $M$, köréírt körének középpontja $O$, a $BC$ oldal felezőpontja $F$ és az $A$ csúcsból induló magasság talppontja $T$. Tudjuk, hogy $MOFT$ egy egységnyi oldalú négyzet. Mekkora a háromszög területe? (A háromszög magasságpontjának nevezzük a magasságvonalak metszéspontját.)

Legyen az $AB$ oldal felezőpontja $E$. Az $AMC$ és az $OEF$ háromszögek hasonlók egymáshoz, mert oldalaik párhuzamosak $AC$ és $EF$ a közép-vonal jól ismert tulajdonsága miatt párhuzamos, $OE$ pedig az $AB$ oldal felezőmerőlegese, azaz merőleges $AB$-re, akárcsak a magasságvonal részeként az $MC$ szakasz. A hasonlóság aránya $2:1$, hiszen a középvonal fele olyan hosszú, mint a megfelelő oldal. Így tehát $AM = 2OF$, azaz $AM$ hossza 2 egység. Az $AOM$ derékszögű háromszögből $AO$ hosszára (azaz a körülírt kör sugarára) $\sqrt{5}$ adódik. Mivel $OF = 1$, az $OFC$ derékszögű háromszögből $FC = 2$ adódik. (Vagy az $OFC$ háromszög egybevágó az $OMA$ háromszöggel: ezek egymás 90°-os elforgatottjai.) Tehát a $BC$ oldal hossza $2 \cdot 2 = 4$, az $AM$ magasság hossza $1 + 2 = 3$, vagyis a háromszög területe $(4 \cdot 3)/2 = 6$ egység.




*Második megoldás.* Az előző megoldásban észrevettük, hogy az $OFC$ és az $OMA$ háromszög egymás 90°-os elforgatottja. Innen $COA\sphericalangle = 90°$. Némi szögszámolással innen kihozható, hogy $\beta = 45°$. Innen pedig $MCT\sphericalangle = 45°$, vagyis az $MCT$ háromszög egy egyenlő szárú derékszögű háromszög. Így $TC = TM = 1$, azaz $FC = 1 + 1 = 2$, ahonnan $BC = 4$. Ebből az is adódik, hogy $BT = 3$, ahonnan $TA = 3$, hiszen $ABT$ is egyenlő szárú derékszögű háromszög. Innen a háromszög területe 6 egység.

# XLVI. verseny 2016–2017.

## Feladatok

**5. osztály** — **Megyei forduló**

1. Egy négyjegyű számról ezeket tudjuk:
   (1) van 3 egymást követő számjegye;
   (2) ezek közül az egyik duplája egy másiknak;
   (3) a 4 db számjegy összege 10;
   (4) a 4 db számjegy szorzata 0;
   (5) a 4-jegyű szám első 2 jegyéből álló 2-jegyű szám 3-mal nagyobb, mint az utolsó 2 jegyéből álló 2-jegyű szám.
   Melyik ez a 4-jegyű szám?

2. a) Írj be + és − jeleket a $\odot$ szimbólumok helyére úgy, hogy az egyenlőség teljesüljön!

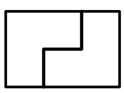
$$1 \odot 2 \odot 3 \odot 4 \odot 5 \odot 6 \odot 7 = 0$$

   b) Hányféle módon lehet beírni a + és − jeleket úgy, hogy az egyenlőség teljesüljön?

3. Egy ötjegyű számot írásban megszoroztunk egy kétjegyűvel, a szorzat hatjegyű lett. Sajnos a számjegyek nagy része elmosódott, ezeket $\star$ jelöli. Állítsd helyre a szorzást!

$$\begin{array}{cccccccc}
\star & 3 & 0 & 7 & 4 & \cdot & \star & \star \\
\hline
\star & \star & 5 & 1 & 8 & & & \\
 & \star & 5 & \star & \star & \star & & \\
\hline
\star & \star & \star & \star & \star & \star & &
\end{array}$$

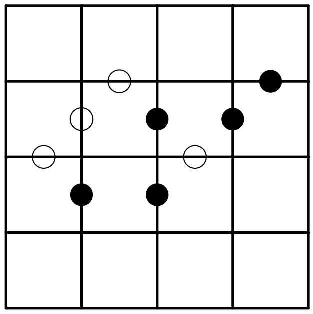
4. L-alakú, 3 négyzetből álló alakzatokkal kirakható legkisebb területű téglalap a $2 \times 3$-as, ahogy az alábbi ábrán is látható.



   a) Kirakható-e ilyen L-alakú elemekkel egy $5 \times 5$-ös négyzet?
   b) Kirakható-e ilyen L-alakú elemekkel egy $6 \times 6$-os négyzet?
   c) Kirakható-e a fenti két négyzet közül valamelyik úgy, hogy a kirakásban szereplő elemek közül semelyik kettő nem alkot egy $2 \times 3$-as téglalapot?

   (A kirakás azt jelenti, hogy átfedés nélkül, hézagmentesen lefedjük a négyzetlapot.)

5. Az ábrán látható $4 \times 4$-es táblázatot kell kitöltenünk az 1, 2, 3, 4 számokkal. A szabályok a következők: (1) Egy adott szám minden sorban és minden oszlopban egyszer szerepel.
(2) Ha két négyzet közös oldalán egy üres karika látható, akkor azokban a négyzetekben szomszédos számok szerepelnek.
(3) Ha két négyzet közös oldalán egy teli karika látható, akkor azokban a négyzetekben két olyan szám szerepel, melyek közül az egyik duplája a másiknak.



Írd be a számokat a szabályok alapján! Indokold, hogy ez az egyetlen megoldás!

**6. osztály** **Megyei forduló**

1. Egy ötjegyű számot írásban megszoroztunk egy kétjegyűvel, a szorzat hatjegyű lett. Sajnos a számjegyek nagy része elmosódott, ezeket $\star$ jelöli. Állítsd helyre a szorzást!

$$\begin{array}{cccccccc}
\star & 3 & 0 & 7 & 4 & \cdot & \star & \star \\
\hline
\star & \star & 5 & 1 & 8 & & & \\
 & \star & 5 & \star & \star & \star & & \\
\hline
\star & \star & \star & \star & \star & \star & &
\end{array}$$

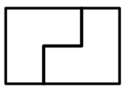
2. Tamás 7 könyvet vásárolt, amelyeknek az ára 500, 700, 1000, 1400, 2000, 2200 és 4000 Ft volt. A boltban olyan akció volt, hogy 3 könyvből a legolcsóbbat ingyen kapta a vásárló. A bolt a számára legkedvezőbb módon csoportosította a könyveket, azaz ahogy Tamás a legtöbbet fizetné. Tamás azonban reklamált és a számára legkedvezőbb módon csoportosított, vagyis ahogy a legkevesebbet kell fizetnie. Mennyit spórolt Tamás a reklamációval?

3. Anna, Béla, Cili, Dénes, Edina, Feri és Gábor baráti összejövetelt szerveznek telefonbeszélgetések útján. Ha közülük ketten már beszéltek az ügyben, akkor többé nem hívják egymást. Anna és Béla eddig 6-6 beszélgetést folytatott le. Cili és Dénes beszélgetéseinek száma különböző páratlan szám. Összesen 14 beszélgetés zajlott le.

   a) Beszélt-e egymással Cili és Dénes?

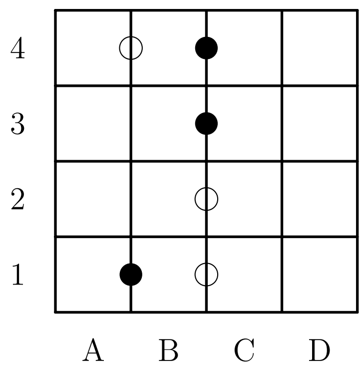
   b) Van-e a hét résztvevő között olyan, akinek csak 2 beszélgetése volt?

4. L-alakú, 3 négyzetből álló alakzatokkal kirakható legkisebb területű téglalap a $2 \times 3$-as (ld. ábra). Mekkora a legkisebb területű téglalap, amely úgy rakható ki ilyen elemekkel, hogy abban semelyik két szereplő elem sem alkot $2 \times 3$-as téglalapot? (A kirakás azt jelenti, hogy átfedés nélkül, hézagmentesen lefedjük a téglalapot.)



5. Az ábrán látható $4 \times 4$-es táblázatot kell kitöltenünk az 1, 2, 3, 4 számokkal. A szabályok a következők:

(1) Egy adott szám minden sorban és minden oszlopban egyszer szerepel.
(2) Ha két négyzet közös oldalán egy üres karika látható, akkor azokban a négyzetekben szomszédos számok szerepelnek.
(3) Ha két négyzet közös oldalán egy teli karika látható, akkor azokban a négyzetekben két olyan szám szerepel, melyek közül az egyik duplája a másiknak.

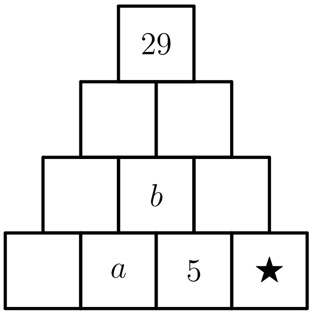



   a) Mutasd meg, hogy a B2-es mezőben csak 3-as szám állhat!

   b) Add meg a táblázat egy olyan kitöltését, amely megfelel a fenti szabályoknak!

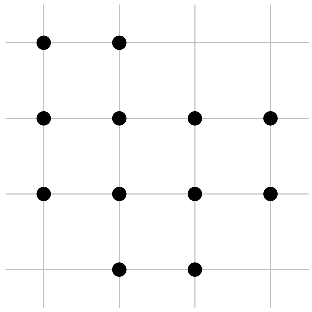
**7. osztály** **Megyei forduló**

1. Az alábbi ábrán minden négyzetbe pozitív egész számokat írhatunk. Tudjuk, hogy bármely négyzetbe írt szám az alatta lévő két négyzetbe írt szám összege. Illetve azt is tudjuk, hogy $a + b = 11$. Add meg az összes számot, amely a ★-gal jelölt mezőbe kerülhet.




2. Egy hatjegyű telefonszámot nevezzünk szerencsésnek, ha az első 3 jegyének összege egyenlő az utolsó három jegyének összegével, és szerencsétlennek, ha az előbbi feltétel nem teljesül. Növekvő sorrendben leírjuk a telefonszámokat. Ebben a sorban legfeljebb hány egymást követő szerencsétlen szám van? (Telefonszámon a 000000-tól 999999-ig terjedő számhatosokat értjük.)

3. Egy négyzethálós lapon megjelöltünk 12 rácspontot az itt látható ábra szerint.
Szép négyszögnek nevezzük azokat a négyszöglapokat, amelyeknek mind a négy csúcsa a fenti 12 pont közül való, és területük megegyezik az egységoldalú négyzet területével. (Nem tekintjük négyszögnek azokat az alakzatokat, amelyeknek 3 csúcsa egy egyenesre illeszkedik.)



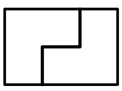
Anna egymás után, pirossal beszínezett az ábrán néhány szép négyszöget. Mindig olyat választott ki következőnek, amelynek pontjai a határvonalát kivéve még színezetlenek voltak. Amikor megunta a színezgetést, a 12 rácspont mindegyike legalább egy pirosra színezett szép négyszög csúcsa volt.
Hány szép négyszöget színezhetett be Anna? Adj példát minden lehetőségre és indokold, hogy miért nem lehet ezektől eltérő a beszínezett szép négyszögek száma!

4. A következő összeadásban minden betű egy számjegyet jelöl. Azonos betűk azonos számjegyeket, különböző betűk különböző számjegyeket.

$$\mathbf{FOUR} + \mathbf{FIVE} = \mathbf{NINE}.$$

Hány különböző megoldás van? (Két megoldás különböző, ha van legalább egy olyan betű, amely eltérő számjegyet jelöl bennük.)

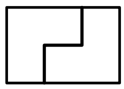
5. L-alakú, 3 négyzetből álló alakzatokkal kirakható legkisebb területű téglalap a $2 \times 3$-as (ld. ábra). Mekkora a legkisebb **páratlan** területű téglalap, amely kirakható ilyen elemekkel? (A kirakás azt jelenti, hogy átfedés nélkül, hézagmentesen lefedjük a téglalapot.)



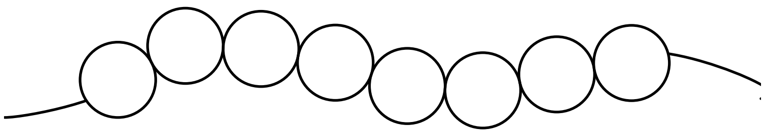
8. osztály Megyei forduló

1. Az $ABCDE$ ötszögre teljesül, hogy $AB = BC = CD = DE$, a $B$-nél lévő szög derékszög, a $C$-nél lévő szög $45°$, a $D$-nél lévő szög pedig $270°$. Mekkorák az ötszög $A$ és $E$ csúcsánál lévő szögei?

2. L-alakú, 3 négyzetből álló alakzatokkal kirakható legkisebb területű téglalap a $2 \times 3$-as (ld. ábra). Mekkora a legkisebb **páratlan** területű téglalap, amely kirakható ilyen elemekkel? (A kirakás azt jelenti, hogy átfedés nélkül, hézagmentesen lefedjük a téglalapot.)



3. Hány olyan 8 gyöngyből álló gyöngysort lehet összeállítani, ahol minden gyöngy kék, piros, vagy zöld, a szomszédosak különböző színűek, az első és az utolsó gyöngy színe pedig megegyezik? (Két gyöngysor különböző, ha balról jobbra haladva van olyan pozíció, ahol különböző színű gyöngyöket tartalmaznak.)



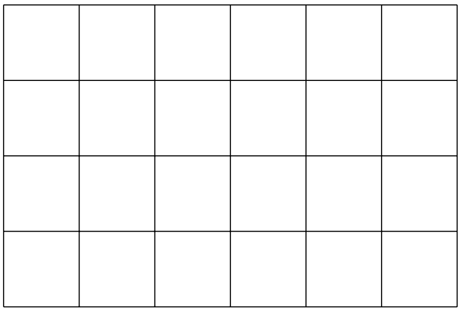
4. Egy téglatest minden élének hosszúsága egyjegyű pozitív egész szám. Minden lapra ráírtuk a területét. A lapokon lévő számok reciprokait összeadva az eredmény $\frac{2}{7}$. Mekkorák a téglatest élei?

5. Tamás 9 könyvet vásárolt, amelyeknek az ára csupa különböző 2-hatvány volt. A boltban olyan akció volt, hogy bármely 3 könyvből a legolcsóbbat ingyen kapta a vásárló. Hány különböző áron kaphatja meg Tamás a 9 könyvet? (A végösszeget ne kerekítsük.)

1. 4 testvér (akik között nincsenek ikrek) beszélget születésük sorrendjéről. Kettő közülük hazudik, kettő igazat mond.
   **András**: Dávid a legfiatalabb.
   **Boldizsár**: Dávid a legöregebb és Boldizsár a legfiatalabb.
   **Csilla**: Én születtem legkésőbb.
   **Dávid**: Sem legfiatalabb, sem legöregebb nem vagyok.
   Melyik két testvér állítása igaz?

2. Ossz fel egy $6 \times 4$-es téglalapot a rácsvonalak mentén 3 részre úgy, hogy mindegyik rész
   a) hatszög
   b) nyolcszög
   c) tízszög

   legyen! Elég csak a felosztásokat megadni, nincs szükség indoklásra!

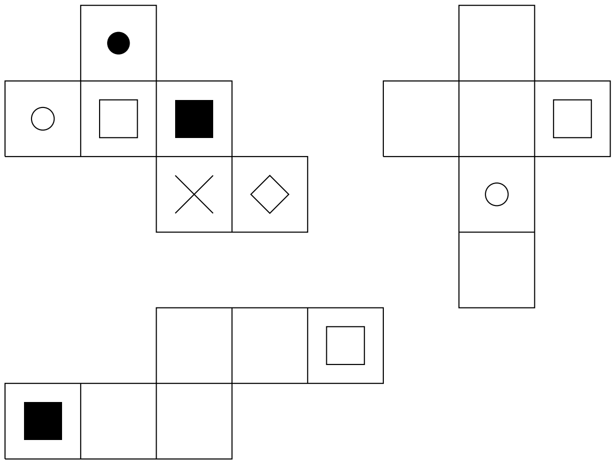


3. Aladár és Pisti kitalálós játékot játszanak egy $5 \times 5$-ös táblán. Pisti titokban kiválaszt és megjegyez a tábláról 18 mezőt, ezeket kell Aladárnak kitalálnia. Aladár úgy kérdezhet, hogy bejelöl a táblán 18 mezőt. Ezekről Pisti megmondja, hogy közülük melyek szerepelnek az általa gondolt mezők között. Ezután Aladár újra 18 mező megjelölésével kérdezhet, amelyre Pisti megint válaszol, és így tovább. Mennyi az a legkevesebb kérdés, amelyet ügyesen feltéve Aladár szerencse nélkül is biztosan meghatározhat 12 mezőt a gondoltak közül?

4. Adottak a következő törtek:
   $$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}.$$
   Minden lépésben készíthetünk egy új számot úgy, hogy a következő két művelet valamelyikének végeredményével bővítjük az eddigi számok halmazát:
   - egy meglévő számban felcseréljük a számlálót és a nevezőt;
   - egy meglévő számot kivonunk 1-ből.

   Hány számot kaphatunk így, ha akárhány lépést elvégezhetünk? (Az újonnan kapott számot a következő lépésben már felhasználhatjuk.)
   (A törteknek minden esetben a legegyszerűbb alakját használd! Pl.: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ és $\frac{3}{1} = 3$.)

5. Egy papírból készült kocka lapjaira kívülről mintákat rajzoltunk. Ezután szétnyitottuk a kockát, kiterítettük, így az első ábrán látható hálót kaptuk. A másik két hálóból pontosan ugyanilyen kockát szeretnénk hajtogatni.
Rajzold be a hiányzó mintákat a megfelelő négyzetekbe! (A papír nem átlátszó, és a mintát csak az egyik oldalon rajzoljuk meg.) Elegendő megadni a helyes ábrát, nincs szükség indoklásra.



1. Egy 14 fős baráti társaságban üveggolyókat gyűjtenek: pirosat, zöldet és sárgát. A következőket tudjuk:

   (1) Akinek nincs zöld, annak van piros vagy sárga.

   (2) Akinek nincs sárga, annak van piros.

   (3) Közülük 7-nek pontosan 2-féle üveggolyója van.

   (4) Ötüknek eddig csak 1-félét sikerült gyűjteni.

   Válaszolj az alábbi kérdésekre:

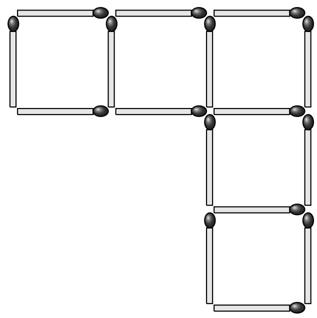
   a) Hánynak nincs eddig még üveggolyója?

   b) Hánynak van mindhárom fajta?

   c) Van-e olyan társaság, melyre az összes feltétel teljesül?

2. a) Helyezz át az ábrán két gyufaszálat úgy, hogy a négyzetek száma 4-re csökkenjen, és minden gyufaszál valamelyik négyzet teljes oldalát alkossa.

   b) Hány megoldás lehetséges? (Két megoldás különböző, ha az áthelyezések után valamelyikben van gyufa egy olyan helyen, ahol a másikban nincs.)



3. Azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.

$$\begin{array}{r} ABCD \\ DABC \\ CDAB \\ +\quad CDA \\ \hline CCCCB \end{array}$$

   Add meg az $ABCD$ négyjegyű szám összes lehetséges értékét!

4. Be lehet-e írni az alábbi számokat egy $3 \times 3$-as táblázat mezőibe úgy, hogy minden sorban egyenlő legyen a számok összege, és minden oszlopban is egyenlő legyen a számok összege?

   a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

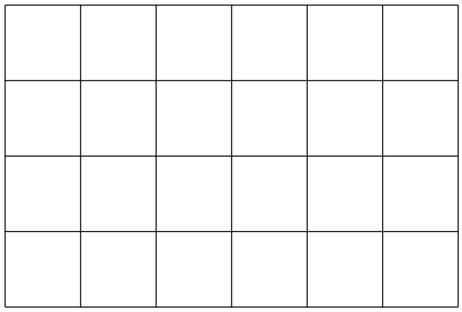
   b) 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4

   c) 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11

**6. osztály, 1. nap** **Országos döntő**

1. Ossz fel egy $6 \times 4$-es téglalapot a rácsvonalak mentén 3 részre úgy, hogy mindegyik rész
   a) hatszög
   b) nyolcszög
   c) tízszög

   legyen! Elég csak a felosztásokat megadni, nincs szükség indoklásra!



2. Van egy 4 számból álló halmazunk. Minden lépésben egy új négyelemű halmazt gyártunk úgy, hogy elkészítjük bármely 3 szám összegét. Három ilyen lépés után a $\{63; 68; 69; 70\}$ halmazt kaptuk. Mi volt az eredeti négy szám?

3. Meg lehet-e adni 50 egész számot úgy, hogy az összegük egy 10-nél nagyobb prímszám, a szorzatuk pedig egy ennél 1-gyel kisebb négyzetszám legyen?

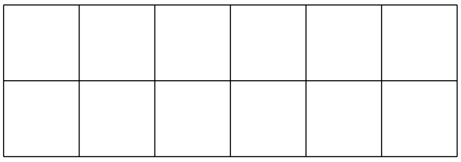
4. Egy többjegyű pozitív egész számot különlegesnek nevezünk, ha nincs benne 0 számjegy, és bárhol kettévágva a kapott számok közül az egyik osztója a másiknak. Az 1442 például különleges, mert az 1 osztója a 442-nek, a 14 osztója a 42-nek, valamint a 144-nek osztója a 2.
   Hány különleges szám van 500000 és 600000 között?

5. Aladár és Pisti kitalálós játékot játszanak egy $10 \times 10$-es táblán. Pisti titokban kiválaszt és megjegyez a tábláról 18 mezőt, ezeket kell Aladárnak kitalálnia. Aladár úgy kérdezhet, hogy bejelöl a táblán 18 mezőt. Ezekről Pisti megmondja, hogy közülük melyek szerepelnek az általa gondolt mezők között. Ezután Aladár újra 18 mező megjelölésével kérdezhet, amelyre Pisti megint válaszol, és így tovább. Mennyi az a legkevesebb kérdés, amelyet ügyesen feltéve Aladár szerencse nélkül is biztosan meghatározhat 9 mezőt a gondoltak közül?

6. osztály, 2. nap

Országos döntő

1. Gyula bácsi négy legkedvesebb galambja egy $6 \times 2$-es elrendezésű galambdúcban lakik. A legjobb tenyészpárjának tagjait, Királyt és Dámát egy szinten lévő, szomszédos dúcokban helyezte el. Sem alattuk, sem felettük, sem a szomszédos dúcokban nincs másik galamb. A legjobb madarát, Ászt, és a legígéretesebbet, Bubit egy-egy fennmaradó dúcba költöztette. Hányféle elrendezésben lakhat Gyula bácsi 4 kedvenc madara?



2. Be lehet-e írni az alábbi számokat egy $3 \times 3$-as táblázat mezőibe úgy, hogy minden sorban ugyanannyi legyen a számok összege, és minden oszlopban is ugyanannyi legyen a számok összege?

   a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

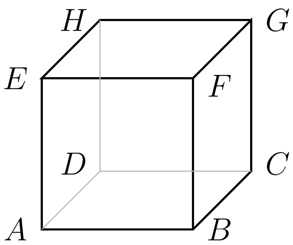
   b) 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4

   c) 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11

3. Színezd meg egy kocka éleit úgy, hogy minden csúcsban az egy csúcsba futó élek különböző színűek legyenek!

   a) Legkevesebb hány színnel oldható meg ez a színezés?

   b) A legkevesebb színt használva hány különböző megoldás van? Két megoldást különbözőnek tekintünk, ha van olyan él (pl. $BF$), amelynek színe a két megoldásban különböző.



4. A sakktábla A1 mezőjéről sétálni indul egy vezér. Egy lépésben balra, jobbra, felfelé, lefelé vagy a 4 átlós irány bármelyikében léphet akármennyit. Csak olyan mezőre léphet, amelyen még előzőleg nem járt. Nem lehet két egyforma lépése, azaz amelyeknek az iránya és nagysága is megegyezik.

   a) Lehetséges-e olyan séta, amelynek során a vezér a sakktábla első két sorának minden mezőjét bejárja, de más mezőre nem lép?

   b) Lehetséges-e olyan séta, amelynek során a vezér a sakktábla minden mezőjét bejárja?

   c) Lehetséges-e olyan séta, amelynek során a vezér nem lép a 8. sor és a H oszlop mezőire, minden más mezőre viszont igen?

   Megjegyzés: egy $2 \times 3$-as téglalap bejárható ilymódon. Az alábbi ábra mutatja a bejárást. A mezőben álló szám jelzi, hogy hányadik lépésben lép a vezér arról a mezőről. Ha a fentiek közül valamelyik feladat megoldható, akkor a megoldást ilyen formában add meg:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 2 | 4 |
| 1 | 1 | 5 | 3 |
| | A | B | C |

## 7. osztály, 1. nap — Országos döntő

1. Előállítható-e a 22222244444 szám öt egymást követő egész szám szorzataként?

2. Van egy négy számból álló halmazunk. Minden lépésben egy új négyelemű halmazt készítünk úgy, hogy az összes lehetséges módon elkészítjük a meglévő halmazból három szám összegét. Három lépés után a $\{63, 68, 69, 70\}$ halmazt kaptuk. Mi volt az eredeti négy szám?

3. $ABCDEF$ egy szabályos hatszög, melynek területe 1 területegység. (Az ábécé szomszédos betűi a hatszög szomszédos csúcsait jelölik.) $X$ a $CD$ oldal felezőpontja, $Y$ pedig az $EF$ oldalé. Mekkora az $ABCXYF$ hatszög területe? (A szabályos sokszögek minden oldala és szöge egyenlő.)

4. Egy többjegyű pozitív egész számot különlegesnek nevezünk, ha nincs benne 0 számjegy, és bárhol kettévágva a kapott két szám közül az egyik osztja a másikat. Például az 1442 különleges, mert az 1 osztója a 442-nek, a 14 osztója a 42-nek, és a 144-nek osztója a 2. Hány különleges szám van 800 000 és 900 000 között?

5. Beírtuk egy $6 \times 6$-os táblázat mezőibe az egész számokat 1-től 36-ig úgy, hogy az egymást követő számok oldalszomszédos mezőkbe kerültek, de a 4 többszöröseit tartalmazó mezőknek nincs közös csúcsa.

   a) Mutasd meg, hogy ekkor a 36 csak valamelyik sarokmezőbe kerülhetett!

   b) Adj példát a feltételeknek megfelelő kitöltésre!

**7. osztály, 2. nap** **Országos döntő**

1. Egy pozitív prímszámokból álló, növekedő sorozatban az egymást követő tagok különbsége 12. Melyik a leghosszabb ilyen sorozat?

2. Az $ABC$ szabályos háromszög $BC$ oldalának belső pontja $X$, $CA$ oldalának belső pontja $Y$, $AB$ oldalának belső pontja $Z$. Hány darab egyenlő szárú háromszög lehet az $AYZ$, $BXZ$, $CXY$, $XYZ$ háromszögek között? Az összes lehetőségre mutass példát!

3. Két játékos, $A$ (aki a játékot kezdi) és $B$ a következő játékot játsszák: felváltva törölnek egy-egy számjegyet a 876543210 számból, amíg csak egyetlen jegy marad. Ha a nyolc törlés bármelyike után a számjegyeket összeolvasva a szám osztható néggyel, $B$ nyeri a játékot, egyébként pedig $A$. Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája? Ha van, adj is meg egy nyerő stratégiát!
(Ha a játék végén 0 marad, akkor $B$ nyert, hiszen 0 osztható 4-gyel.)

4. Egy 7 fős rablóbanda rabolt egy zsák aranyat. Szétrakták az asztalon, majd így osztoztak: először egyikük megszámolta az aranyakat, majd elvett annyit, amennyi a darabszám számjegyeinek összege. Ezután a jobb oldali szomszédja a maradékot számolta meg, s elvett annyi aranyat, amennyi e szám jegyeinek összege, s így folytatták tovább. Azt tapasztalták, hogy épp akkor fogyott el, mikor mindenki ugyanannyiszor vett már, sőt, mindenkinek ugyanannyi arany jutott a vezért kivéve. Őhozzá több arany került. Tudjuk még, hogy 200-nál nem fér több arany egy zsákba. Hány arany lehetett kezdetben, és hányadikként vett a rablóvezér?

**8. osztály, 1. nap** **Országos döntő**

1. Lehet-e találni két egymást követő kettőhatványt, melyek összege négyzetszám?
(Kettőhatványnak nevezzük az $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ sorozat tagjait, ahol minden tag az őt megelőző kétszerese.)

2. Egy sokszög minden oldalának hossza centiméterben mérve egész szám, az összes belső szögének nagysága pedig $60°$ vagy $240°$. Lehet-e a sokszög oldalainak száma
   a) 2016?
   b) 2017?

3. Ki lehet-e színezni a sík pontjait négy színnel úgy, hogy ne lehessen találni négy darab egyszínű pontot, melyek egy téglalap négy csúcsát alkotják?

4. Egy 0-tól és 1-től különböző racionális számból kiindulva műveleteket hajtunk végre. Egy lépésben a következő két művelet valamelyikét: vehetjük egy meglévő szám reciprokát, vagy egy meglévő számot kivonhatunk egyből. A kapott számot a következő lépésben már felhasználhatjuk. Ezeket a lépéseket addig ismételjük, amíg már nem jöhet ki új szám. A kiinduló szám értékétől függően hányféle számot kaphatunk ilyen módon? Az összes lehetőségre mutass példát!

5. 16 csapat körmérkőzést játszik, mindenki mindenkivel pontosan egyszer találkozik. Minden mérkőzésen az egyik csapat nyer, a másik veszít, döntetlen nincsen.
Add meg a 12 győzelmet elérő csapatok számának legnagyobb lehetséges értékét!

## 8. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. Egy pozitív prímszámokból álló, növekedő sorozatban az egymást követő tagok különbsége 12. Melyik a leghosszabb ilyen sorozat?

2. Két játékos, $A$ (aki a játékot kezdi) és $B$ a következő játékot játsszák: felváltva törölnek egy-egy számjegyet a 876543210 számból, amíg csak egyetlen jegy marad.
Ha a nyolc törlés bármelyike után a számjegyeket összeolvasva a szám osztható néggyel, $B$ nyeri a játékot, egyébként pedig $A$. Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája? Ha van, adj is meg egy nyerő stratégiát!
(Ha a játék végén 0 marad, akkor $B$ nyert, hiszen 0 osztható 4-gyel.)

3. Egy $5 \times 5$-ös táblázat mezőibe beírtuk a pozitív egész számokat 1-től $n$-ig (mindegyiket egyszer), a kimaradó mezőkbe pedig nullákat írtunk. A kitöltést *érdekesnek* nevezünk, ha minden sorban és minden oszlopban egyenlő a beírt számok összege. Melyik a legkisebb pozitív egész $n$, melyre található *érdekes* kitöltés?

4. Melyek azok az $ABCD$ négyszögek, melyek belsejében található olyan $P$ pont, hogy a $PA$, $PB$, $PC$, $PD$ szakaszok a négyszög belsejében haladnak, és az $ABP$, $BCP$, $CDP$ és $DAP$ háromszögek területe mind egyforma? Igyekezz minél egyszerűbb jellemzést adni!

# Megoldások

## 5. osztály — Megyei forduló

1. Egy négyjegyű számról ezeket tudjuk:
(1) van 3 egymást követő számjegye;
(2) ezek közül az egyik duplája egy másiknak;
(3) a 4 db számjegy összege 10;
(4) a 4 db számjegy szorzata 0;
(5) a 4-jegyű szám első 2 jegyéből álló 2-jegyű szám 3-mal nagyobb, mint az utolsó 2 jegyéből álló 2-jegyű szám.
Melyik ez a 4-jegyű szám?

*Első megoldás.* (1) és (2) miatt ezek a szomszédos hármasok jönnek szóba: $(0,1,2)$; $(1,2,3)$; $(2,3,4)$. (4) miatt az egyik jegy 0, és (3) miatt az összeg 7, ezért $(0,1,2,3)$; $(0,2,3,4)$ nem lehetnek a jegyek. Így $(0,1,2,7)$ a négy számjegy. (★) Végül (5) miatt a megoldás a 2017, mert a 0 nem állhat az első helyen, és a 7 túl nagy, az 1 pedig túl kicsi lenne az első helyre ahhoz, hogy az első két jegyből álló szám 3-mal nagyobb lehessen a második kettőből állónál.
*Második megoldás.* Folytatás (★)-tól.
Így a szám első két jegye lehet: 10, 12, 17, 20, 21, 27, 70, 71, 72. Ezek közül a maradék számjegyekkel csak a 20 fejezhető be az (5) feltételnek megfelelően. A megoldás 2017.

2. a) Írj be + és − jeleket a ⊙ szimbólumok helyére úgy, hogy az egyenlőség teljesüljön!

$$1 \odot 2 \odot 3 \odot 4 \odot 5 \odot 6 \odot 7 = 0$$

b) Hányféle módon lehet beírni a + és − jeleket úgy, hogy az egyenlőség teljesüljön?

1-től 7-ig a számok összege 28, tehát összesen 14 lesz azoknak a számoknak az összege, amelyek elé − kerül (és az 1 elé nem írható −). Mivel két szám összege legfeljebb $6+7=13$, ezért legalább 3 szám elé kell − jel. De akkor legfeljebb 4 elé írhatunk − jelet, mert ha néhány szám összege 14, akkor a maradék számok összege szintén 14. Tehát 3, vagy 4 db − jel kiosztásával megtalálható az összes lehetőség:

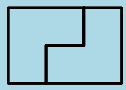
$$1-2+3+4-5+6-7$$
$$1+2-3-4+5+6-7$$
$$1+2-3+4-5-6+7$$
$$1-2-3-4-5+6+7.$$

3. Egy ötjegyű számot írásban megszoroztunk egy kétjegyűvel, a szorzat hatjegyű lett. Sajnos a számjegyek nagy része elmosódott, ezeket $\star$ jelöli. Állítsd helyre a szorzást! Indokolj.

$$\begin{array}{cccccccc}
\star & 3 & 0 & 7 & 4 & \cdot & \star & \star \\
\hline
\star & \star & 5 & 1 & 8 & & & \\
 & \star & 5 & \star & \star & \star & & \\
\hline
\star & \star & \star & \star & \star & \star & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 3 & 0 & 7 & 4 & \cdot & 7 & 5 \\
\hline
9 & 1 & 5 & 1 & 8 & & & \\
 & 6 & 5 & 3 & 7 & 0 & & \\
\hline
9 & 8 & 0 & 5 & 5 & 0 & &
\end{array}$$

4. L-alakú, 3 négyzetből álló alakzatokkal kirakható legkisebb területű téglalap a $2 \times 3$-as, ahogy az alábbi ábrán is látható.



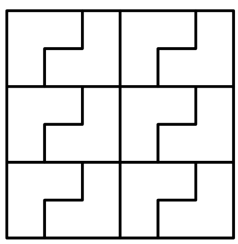
a) Kirakható-e ilyen L-alakú elemekkel egy $5 \times 5$-ös négyzet?

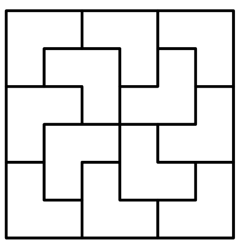
b) Kirakható-e ilyen L-alakú elemekkel egy $6 \times 6$-os négyzet?

c) Kirakható-e a fenti két négyzet közül valamelyik úgy, hogy a kirakásban szereplő elemek közül semelyik kettő nem alkot egy $2 \times 3$-as téglalapot?

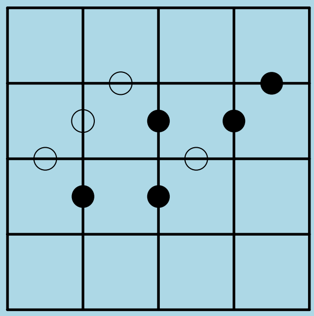
(A kirakás azt jelenti, hogy átfedés nélkül, hézagmentesen lefedjük a négyzetlapot.)

Egy L-alakú elem három négyzetet fed le, ezért az L-alakú elemekkel kirakható alakzatok területe biztosan osztható 3-mal. Az $5 \times 5$-ös négyzet területe 25 egység, ami nem osztható 3-mal, ezért a kirakás nem lehetséges. A $6 \times 6$-os négyzet kirakható L-alakú elemekkel. Például egy lehetséges megoldás, ha 6 db $2 \times 3$-as téglalapból rakjuk ki (ld. bal oldali ábra). Létezik azonban olyan kirakás is, amelyben semelyik két elem nem alkot $2 \times 3$-as téglalapot (ld. jobb oldali ábra), ezért a (c) kérdésre is igen a válasz.

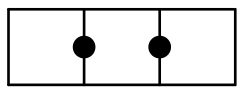




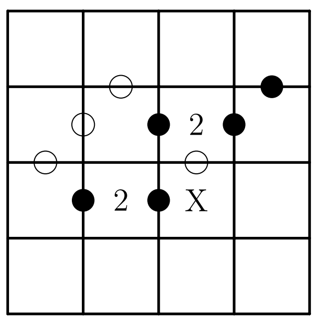
5. Az ábrán látható $4 \times 4$-es táblázatot kell kitöltenünk az 1, 2, 3, 4 számokkal. A szabályok a következők:
(1) Egy adott szám minden sorban és minden oszlopban egyszer szerepel.
(2) Ha két négyzet közös oldalán egy üres karika látható, akkor azokban a négyzetekben szomszédos számok szerepelnek.
(3) Ha két négyzet közös oldalán egy teli karika látható, akkor azokban a négyzetekben két olyan szám szerepel, melyek közül az egyik duplája a másiknak.
Írd be a számokat a szabályok alapján! Indokold, hogy ez az egyetlen megoldás!



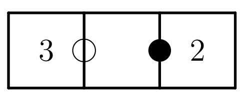
A teli karikák szomszédai ezek a párok lehetnek: $(1; 2)$, $(2; 4)$, ezért az alábbi rész középső mezőjén csak a 2 állhat.



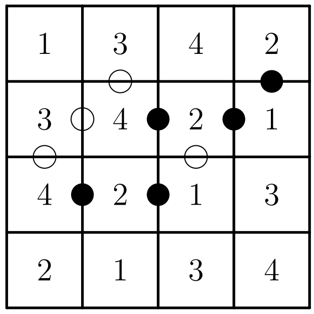
Ha beírjuk ezeket a 2-eseket, akkor az X jelű mezőbe csak 1-es kerülhet, mert ez szomszédja is a 2-nek, és fele vagy kétszerese is.




A harmadik sorban az első mezőbe már csak 4-es kerülhet, mert 1-es már van a sorban. Ez a sor tehát balról jobbra: 4, 2, 1, 3. A 4 fölé 3 kerül, mert csak ez szomszédos a 4-gyel, így a 2. sorban a 3 és 2 közé csak a 4-et írhatjuk a két karika jelzésének megfelelően. Ezért ebben a sorban az utolsó mezőbe 1 kerül.




Az első sorban az 1 fölé csak 2, a 4 fölé csak 3 kerülhet (a karikák útmutatása szerint). Mivel egy sorban és egy oszlopban ugyanaz a szám csak egyszer szerepelhet, ebben a sorban az első helyre már csak az 1-es, az utolsóra a 4-es kerülhet. Az utolsó sorban azokat a számokat helyezzük el, amelyek az oszlopból még hiányoznak. Így a helyes kitöltés:



6. osztály — Megyei forduló

1. Egy ötjegyű számot írásban megszoroztunk egy kétjegyűvel, a szorzat hatjegyű lett. Sajnos a számjegyek nagy része elmosódott, ezeket $\star$ jelöli. Állítsd helyre a szorzást!

$$\begin{array}{cccccccc}
\star & 3 & 0 & 7 & 4 & \cdot & \star & \star \\
\hline
\star & \star & 5 & 1 & 8 & & & \\
 & \star & 5 & \star & \star & \star & & \\
\hline
\star & \star & \star & \star & \star & \star & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 3 & 0 & 7 & 4 & \cdot & 7 & 5 \\
\hline
9 & 1 & 5 & 1 & 8 & & & \\
 & 6 & 5 & 3 & 7 & 0 & & \\
\hline
9 & 8 & 0 & 5 & 5 & 0 & &
\end{array}$$

2. Tamás 7 könyvet vásárolt, amelyeknek az ára 500, 700, 1000, 1400, 2000, 2200 és 4000 Ft volt. A boltban olyan akció volt, hogy 3 könyvből a legolcsóbbat ingyen kapta a vásárló. A bolt a számára legkedvezőbb módon csoportosította a könyveket, azaz ahogy Tamás a legtöbbet fizetné. Tamás azonban reklamált és a számára legkezdvezőbb módon csoportosított, vagyis ahogy a legkevesebbet kell fizetnie. Mennyit spórolt Tamás a reklamációval?

Mivel 7 könyv van, ezért két hármas csoport állítható össze, vagyis két könyvet fog Tamás ingyen megkapni. A bolt akkor jár jól, ha minél olcsóbb könyveket ad ingyen, Tamás pedig akkor, ha minél drágábbakat. A bolt el tudja érni, hogy a két legolcsóbb könyv legyen ingyen, hiszen az egyik csoportba teszi a 4000, 2200 és 500 Ft-os könyvet, a másikba pedig a 2000, 1400 és a 700 Ft-osat. Ekkor az 500 és a 700 Ft-os könyvet kapja Tamás ingyen. Tehát a kifizetett összeg ekkor: $4000 + 2200 + 2000 + 1400 + 1000 = 10600$ forint. Tamás minél drágább könyveket szeretne ingyen megkapni.
A két legdrágább könyvet mindenképpen ki kell fizetnie, hiszen nincs olyan hármas csoport, amelyben ezek egyike lenne a legolcsóbb. Az olcsóbb ingyen kapott könyv ára legfeljebb a

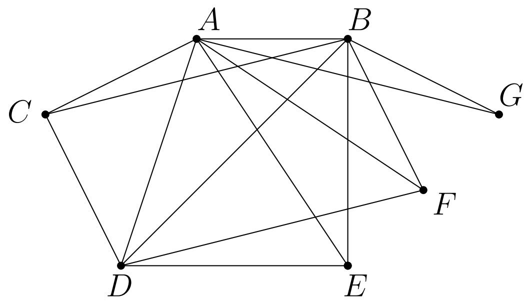
hatodik legnagyobb összeg lehet, hiszen a 4 kifizetett összegnek és a drágább ingyenesnek is több az ára. A legkedvezőbb esetben tehát a harmadik és hatodik legdrágább könyv szerezhető meg ingyen. A kifizetett összeg ekkor: $4000 + 2200 + 1400 + 1000 + 500 = 9100$ forint. Vagyis Tamás $10600 - 9100 = 1500$ forintot tudott spórolni a reklamációval.

3. Anna, Béla, Cili, Dénes, Edina, Feri és Gábor baráti összejövetelt szerveznek telefonbeszélgetések útján. Ha közülük ketten már beszéltek az ügyben, akkor többé nem hívják egymást. Anna és Béla eddig 6-6 beszélgetést folytatott le. Cili és Dénes beszélgetéseinek száma különböző páratlan szám. Összesen 14 beszélgetés zajlott le.

a) Beszélt-e egymással Cili és Dénes?

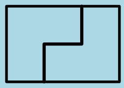
b) Van-e a hét résztvevő között olyan, akinek csak 2 beszélgetése volt?

*Első megoldás.* Jelöljük $A, B, C, D, E, F$ és $G$-vel az ilyen kezdőbetűjű emberek beszélgetéseinek a számát.
Mivel összesen 14 beszélgetés zajlott le, és egy beszélgetés pontosan két ember között zajlik, ezért $A+B+C+D+E+F+G = 28$. Mivel $A = 6$, $B = 6$, azaz ők mindenkivel beszéltek, ezért $C, D, E, F, G \geq 2$. $C$ és $D$ különböző páratlan számok. Mivel $C$ és $D$ különböző páratlan számok, mindkettő értéke legalább 2 és legfeljebb 6, ezért $C$ és $D$ értéke valamilyen sorrendben 3 és 5. Tudjuk, hogy $A+B+C+D = 20$, tehát $E+F+G = 8$. A 8 kétféle módon jöhet ki 3 megfelelő egész szám összegeként: $2+2+4$ vagy $2+3+3$. Tehát biztosan van olyan ember, akinek csak 2 beszélgetése volt. Mindkét esetben legalább egy ember $E, F, G$ közül nem beszélt senkivel $A$-n és $B$-n kívül, ezért csak úgy lehet meg az 5 beszélgetése $C$-nek vagy $D$-nek, ha egymással is beszéltek. Az $(A, B, C, D, E, F, G) = (6, 6, 3, 5, 3, 3, 2)$ megvalósítható:

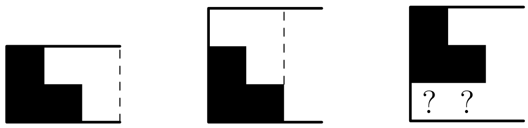



*Második megoldás.* Jelöljük az embereket a nevük kezdőbetűivel.
Mivel $A$ és $B$ beszélt mindenkivel, ezért tekintsünk el tőlük és az általuk lefolytatott beszélgetésektől. 11 ilyen beszélgetés volt, hiszen ők mindenki mással beszéltek, de egymással is. Az összes beszélgetés darabszáma 14-ről így lecsökken 3-ra, a megmaradt személyek beszélgetéseinek száma pedig rendre 2-vel. $C$ és $D$ beszélgetéseinek a száma továbbra is páratlan marad, hiszen 2-vel csökkent, így csakis 1, illetve 3 lehet. Ha $C$ és $D$ nem beszélt volna egymással, akkor ez 4 beszélgetést jelentene összesen, ami lehetetlen. Tehát $C$ és $D$ beszélt egymással. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $D$ beszélt 3 emberrel a megmaradók közül. Mivel $C$-vel beszélt, ezért $E, F$ és $G$ közül az egyikkel nem. Ez az ember nem beszélt egy emberrel sem a megmaradók közül, viszont beszélt $A$-val, illetve $B$-vel, így ő pontosan két emberrel beszélt. Az 1. megoldás végén lévő ábra mutatja, hogy a fentiek meg is valósulhatnak.

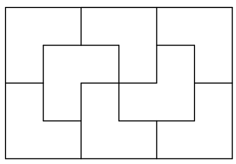
4. L-alakú, 3 négyzetből álló alakzatokkal kirakható legkisebb területű téglalap a $2\times3$-as (ld. ábra). Mekkora a legkisebb területű téglalap, amely úgy rakható ki ilyen elemekkel, hogy abban semelyik két szereplő elem sem alkot $2\times3$-as téglalapot? (A kirakás azt jelenti, hogy átfedés nélkül, hézagmentesen lefedjük a téglalapot.)



A keletkező téglalap mindkét oldala legalább 4 egység hosszú, mert 2 és 3 egységnyi oldalakkal nem teljesíthető a feltétel.



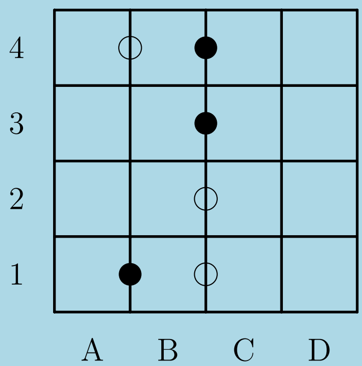

Az L-alakok három négyzetet fednek, ezért a a keletkező téglalap területe osztható 3-mal. Emiatt legalább az egyik oldalának hossza is osztható 3-mal. A legkisebb lehetséges oldalpár ezért a 4 és 6. Ilyen oldalú téglalap készíthető is, tehát a minimális terület 24 egység.



5. Az ábrán látható $4\times4$-es táblázatot kell kitöltenünk az 1, 2, 3, 4 számokkal. A szabályok a következők:
(1) Egy adott szám minden sorban és minden oszlopban egyszer szerepel.
(2) Ha két négyzet közös oldalán egy üres karika látható, akkor azokban a négyzetekben szomszédos számok szerepelnek.
(3) Ha két négyzet közös oldalán egy teli karika látható, akkor azokban a négyzetekben két olyan szám szerepel, melyek közül az egyik duplája a másiknak.

a) Mutasd meg, hogy a B2-es mezőben csak 3-as szám állhat!

b) Add meg a táblázat egy olyan kitöltését, amely megfelel a fenti szabályoknak!

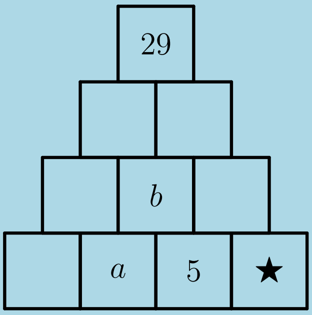


Egy teli karika két oldalán lévő négyzetekben csak az $(1;2)$, illetve a $(2;4)$ párok szerepelhetnek valamilyen sorrendben. Vagyis egy teli karika melletti mezőn nem állhat 3-as. A B oszlopban 3 ilyen mező van, és egy oszlopban minden szám különböző, tehát ezeken a mezőkön szükségképpen az 1, 2, és 4 számoknak kell állniuk. Emiatt az egyetlen teli karikával nem szomszédos mezőn, B3-on csak 3-as állhat. Az egyetlen jó kitöltés:

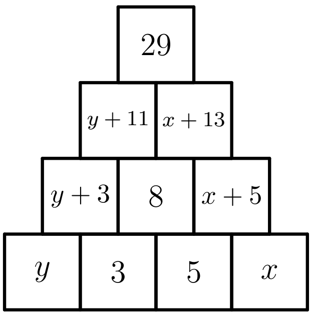
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 4 | 2 |
| 1 | 2 | 4 | 3 | 1 |
| | A | B | C | D |

## 7. osztály — Megyei forduló

1. Az alábbi ábrán minden négyzetbe pozitív egész számokat írhatunk. Tudjuk, hogy bármely négyzetbe írt szám az alatta lévő két négyzetbe írt szám összege. Illetve azt is tudjuk, hogy $a + b = 11$. Add meg az összes számot, amely a ★-gal jelölt mezőbe kerülhet.




A képzési szabály alapján $a + 5 = b$, tehát $a + b = a + a + 5 = 11$, amiből $a = 3$ és $b = 8$. A csillag helyére írt számot jelöljük $x$-szel, az $a$-tól balra lévőt $y$-nal és töltsük ki az üres mezőket az összeadási szabály szerint.



Így a legfelső mezőre az $y + 11 + x + 13 = 29$ feltételt kapjuk, ahonnan $x + y = 5$. Mivel pozitív egészekről van szó, $x$ lehetséges értékei 1, 2, 3 és 4. Mindegyik megvalósítható az $y = 5 - x$ választással.

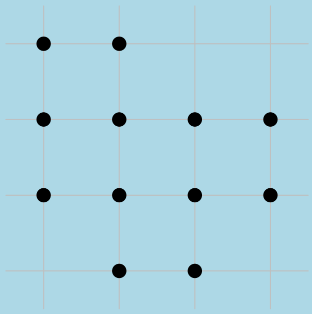
2. Egy hatjegyű telefonszámot nevezzünk szerencsésnek, ha az első 3 jegyének összege egyenlő az utolsó három jegyének összegével, és szerencsétlennek, ha az előbbi feltétel nem teljesül. Növekvő sorrendben leírjuk a telefonszámokat. Ebben a sorban legfeljebb hány egymást követő szerencsétlen szám van? (Telefonszámon a 000000-tól 999999-ig terjedő számhatosokat értjük.)

1000 egymást követő szerencsétlen szám megadható, például:

$$000001, 000002, 000003, \ldots, 000999, 001000.$$

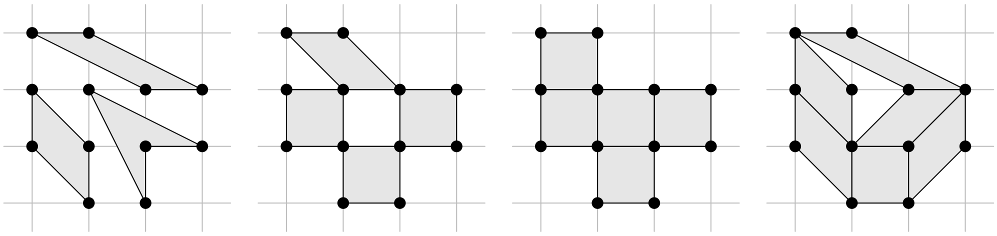
A $000000, 001001, 002002, \ldots, 998998, 999999$ sorozatban viszont minden szám szerencsés, hiszen az első 3 jegy megegyezik az utolsó hárommal. A fenti sorozatban minden 1001-edik telefonszám szerepel (éppen az 1001-gyel oszthatóak). Ezért bármely 1001 szomszédos telefonszám között van olyan, amelyik tagja a sorozatnak, tehát szerencsés. Így legfeljebb 1000 szomszédos szerencsétlen szám adható meg.

3. Egy négyzethálós lapon megjelöltünk 12 rácspontot az itt látható ábra szerint. Szép négyszögnek nevezzük azokat a négyszöglapokat, amelyeknek mind a négy csúcsa a fenti 12 pont közül való, és területük megegyezik az egységoldalú négyzet területével. (Nem tekintjük négyszögnek azokat az alakzatokat, amelyeknek 3 csúcsa egy egyenesre illeszkedik.)



Anna egymás után, pirossal beszínezett az ábrán néhány szép négyszöget. Mindig olyat választott ki következőnek, amelynek pontjai a határvonalát kivéve még színezetlenek voltak. Amikor megunta a színezgetést, a 12 rácspont mindegyike legalább egy pirosra színezett szép négyszög csúcsa volt.
Hány szép négyszöget színezhetett be Anna? Adj példát minden lehetőségre és indokold, hogy miért nem lehet ezektől eltérő a beszínezett szép négyszögek száma!

Legalább 3 szép négyszöget be kellett színeznie, mert különben lenne olyan rácspont, amely nem lenne csúcsa egyik színezett négyszögnek sem. Lehetséges, hogy a beszínezett szép négyszögek száma 3, 4, 5, 6 vagy 7 volt, ezekre 1-1 példát mutatnak az alábbi ábrák:



Az utolsó ábrán látható négyszögek egyesítésével kapott hétszög a 12 pont által meghatározott négyszögek mindegyikét lefedi. Mivel ennek a hétszögnek a területe $9-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=7$ egység, és Anna minden lépésben 1 egységnyi területet színez be, ezért nem színezhetett be 7-nél több szép négyszöget.

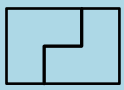
4. A következő összeadásban minden betű egy számjegyet jelöl. Azonos betűk azonos számjegyeket, különböző betűk különböző számjegyeket.

$$\mathbf{FOUR}+\mathbf{FIVE}=\mathbf{NINE}.$$

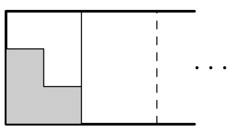
Hány különböző megoldás van? (Két megoldás különböző, ha van legalább egy olyan betű, amely eltérő számjegyet jelöl bennük.)

Az $R+E$ összeg $E$-re végződik, ezért $R=0$. Emiatt a százas helyiértéken az $O+I$ összeg már nem végződhet $I$-re, tehát itt van átvitel, és így az $O+I+1$ összeg végződik $I$-re, amiből $O=9$. A fentiek alapján az egyesek helyén nem keletkezett átvitel, a tízeseknél és a százasoknál viszont igen. Ezért $U+V=10+N$ és $F+F+1=N$. $N$ tehát páratlan, ugyanakkor $N=F+F+1\geq 1+1+1=3$ és $N=U+V-10\leq 8+7-10=5$. Tehát $N=3$ vagy $N=5$. Ha $N=3$, akkor $F=1$ és $U+V=13$. A fennmaradó számjegyek alapján az $(U,V)$ párra 4 lehetőség van: $(8,5),(7,6),(6,7),(5,8)$. Ha $N=5$, akkor $F=2$ és $U+V=15$. A fennmaradó számjegyek alapján az $(U,V)$ párra 2 lehetőség van: $(8,7),(7,8)$. Ez összesen 6 lehetőség az $R$, $O$, $N$, $F$, $U$, $V$ számjegyek megválasztására. Az $(E,I)$ számpárt a még nem használt számjegyek közül szabadon választhatjuk. Így $6\cdot 4\cdot 3=72$ különböző megoldás van.

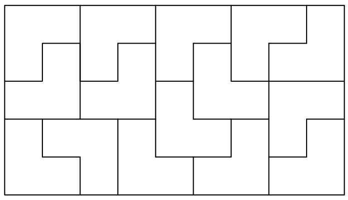
5. L-alakú, 3 négyzetből álló alakzatokkal kirakható legkisebb területű téglalap a $2\times 3$-as (ld. ábra). Mekkora a legkisebb **páratlan** területű téglalap, amely kirakható ilyen elemekkel? (A kirakás azt jelenti, hogy átfedés nélkül, hézagmentesen lefedjük a téglalapot.)



A terület csak úgy lehet páratlan, ha mindkét oldal hossza páratlan. Minden L-alakzat 3 egységnyi területet fed le, így a téglalap területének 3-mal oszthatónak kell lennie. Ezért legalább az egyik oldalhossz 3-mal osztható. Egy 3 egység hosszúságú oldal mentén a két sarokmezőt különböző L-alakzatok tudják csak lefedni, de ezek csak úgy helyezhetők el, hogy egy $3\times 2$-es téglalapot alkotnak. A fennmaradó téglalapra ezt a gondolatot megismételve újabb $3\times 2$-es téglalapot kapunk, és így tovább, míg végül az egész téglalapot lefedjük $3\times 2$-es téglalapokkal. Ez viszont csak akkor lenne lehetséges, ha az oldalhossza páros lenne.



Tehát a 3-mal osztható hosszúságú oldal hossza legalább 9 egység, míg a másik oldal hossza legalább 5 egység, így a terület legalább 45 egység. Ez meg is valósítható az $5\times 9$-es téglalap kirakásával, például az alábbi módon:

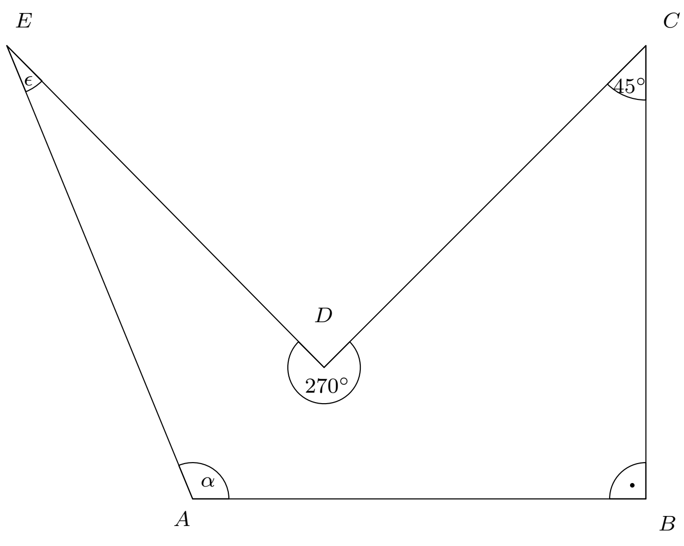


8. osztály

Megyei forduló

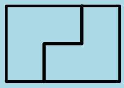
1. Az $ABCDE$ ötszögre teljesül, hogy $AB = BC = CD = DE$, a $B$-nél lévő szög derékszög, a $C$-nél lévő szög 45°, a $D$-nél lévő szög pedig 270°. Mekkorák az ötszög $A$ és $E$ csúcsánál lévő szögei?

Készítsünk először is egy, a feltételeknek eleget tévő ábrát:

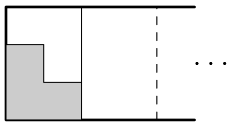



Az $ABC$ háromszög egyenlő szárú, melynek szárszöge 90°, így $ACB\sphericalangle = 45°$. Mivel $DCB\sphericalangle = 45°$ a feladat feltételei szerint, így az $A$, $D$ és $C$ pontok egy egyenesre esnek. Mivel az $EDC$ háromszög egyenlő szárú, melynek szárszöge 90°, így $ECD\sphericalangle = 45°$. $CE = CA$, hiszen a $CDE$ és az $ABC$ háromszögek egybevágók (két oldaluk és a köztük lévő szög megegyezik), amiből kapjuk, hogy $CAE\sphericalangle = CEA\sphericalangle = 67,5°$. Így végül adódik, hogy az $A$ csúcsnál lévő szög, $\alpha = 45° + 67,5° = 112,5°$, illetve $\epsilon = 67,5° - 45° = 22,5°$, hiszen az $DEC\sphericalangle = 45°$ is teljesül. (A feladat befejezésénél hivatkozhatunk arra a jól ismert tényre is, hogy az ötszögek szögeinek összege $3 \cdot 180° = 540°$).

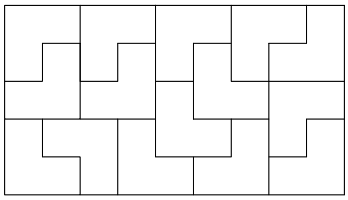
2. L-alakú, 3 négyzetből álló alakzatokkal kirakható legkisebb területű téglalap a $2 \times 3$-as (ld. ábra). Mekkora a legkisebb **páratlan** területű téglalap, amely kirakható ilyen elemekkel? (A kirakás azt jelenti, hogy átfedés nélkül, hézagmentesen lefedjük a téglalapot.)



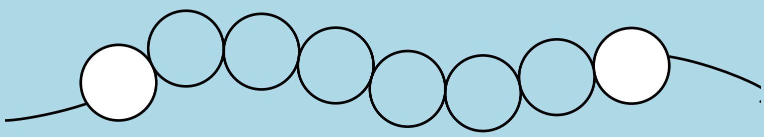
A terület csak úgy lehet páratlan, ha mindkét oldal hossza páratlan. Minden L-alakzat 3 egységnyi területet fed le, így a téglalap területének 3-mal oszthatónak kell lennie. Ezért legalább az egyik oldalhossz hárommal osztható. Egy 3 egység hosszúságú oldal mentén a két sarokmezőt különböző L-alakzatok tudják csak lefedni, de ezek csak úgy helyezhetők el, hogy egy $3 \times 2$-es téglalapot alkotnak. A fennmaradó téglalapra ezt a gondolatot megismételve újabb $3 \times 2$-es téglalapot kapunk, és így tovább, míg végül az egész téglalapot lefedjük $3 \times 2$-es téglalapokkal. Ez viszont csak akkor lenne lehetséges, ha az oldalhossza páros lenne.



Tehát a 3-mal osztható hosszúságú oldal hossza legalább 9 egység, míg a másik oldal hossza legalább 5 egység, így a terület legalább 45 egység. Ez meg is valósítható az $5 \times 9$-es téglalap kirakásával, például az alábbi módon:



3. Hány olyan 8 gyöngyből álló gyöngysort lehet összeállítani, ahol minden gyöngy kék, piros, vagy zöld, a szomszédosak különböző színűek, az első és az utolsó gyöngy színe pedig megegyezik? (Két gyöngysor különböző, ha balról jobbra haladva van olyan pozíció, ahol különböző színű gyöngyöket tartalmaznak.)



*Első megoldás.* Kezdjük el felépíteni a gyöngysort balról. Tegyük fel, hogy kékkel indítunk.

A betűk jelzik, hogy milyen színű az éppen aktuális gyöngy, a számok pedig azt, hogy az éppen aktuális gyöngyig hányféle gyöngysor volt felépíthető:

$$K(1) \to K(0), P(1), Z(1) \to K(2), P(1), Z(1) \to K(2), P(3), Z(3) \longrightarrow K(6), P(5), Z(5) \to$$
$$\to K(10), P(11), Z(11) \to K(22), P(21), Z(21) \to K(42)$$

A rekurzió szabálya a második lépéstől kezdve következő volt:

$$K(k), P(p), Z(z) \to K(p+z), P(k+z), Z(k+p),$$

hiszen ha például kék gyönggyel szeretnénk folytatni a sort, akkor előtte a sor piros vagy zöld gyönggyel végződött. Így a feladat kérdésére a válasz $3 \cdot 42 = 126$.

*Második megoldás. (Az előző megoldás kissé módosított változata.)* Jelölje $a(n)$ azt, hogy hány olyan $n$ gyöngyből álló gyöngysor van, melyben az első és az utolsó gyöngy azonos színű, $b(n)$ pedig azt, hogy hány olyan $n$ gyöngyből álló gyöngysor van, melyben az első és az utolsó gyöngy különböző színű. Nyilván $a(1) = 3$ és $b(1) = 0$. Vegyük észre, hogy $a(n+1) = b(n)$. Valóban, ha az első és utolsó gyöngy színe azonos, akkor az első és az utolsó előtti gyöngy színe különböző, és egy ilyen elrendezést egyértelmű befejezni. Hasonlóan, $b(n+1) = 2a(n) + b(n)$ is teljesül, hiszen ha az első $n$ gyöngyből álló sorban ugyanaz az első és az $n$. gyöngy színe, akkor kétféle módon lehet befejezni ezt a sort, ha pedig különböző, akkor egyféle módon. Ezután egyszerű számolással $a(2) = 0$, $b(2) = 6$, $a(3) = 6$, $b(3) = 6$, $a(4) = 6$, $b(4) = 18$, $a(5) = 18$, $b(5) = 30$, $a(6) = 30$, $b(6) = 66$, $a(7) = 66$, $b(7) = 126$, $a(8) = 126$. Tehát a feladat kérdésére a válasz 126.

*Harmadik megoldás.* Tegyük fel, hogy az első (és így az utolsó) gyöngyszem kék. Megszámoljuk az ilyen eseteket, majd szorzunk hárommal, mert piros és zöld is lehet az első gyöngy. Felsoroljuk, hogy hol lehet még kék gyöngy a sorban (a kék gyöngyszemek száma szerint csoportosítva az eseteket).

- `K.K.K..K`
- `K..K.K.K`
- `K.K..K.K`
- `K.K....K`
- `K..K...K`
- `K...K..K`
- `K....K.K`
- `K......K`

Minden pontozott ,,szakasz'' (két kék gyöngy közötti rész) kétféle lehet, mert a kezdő szín eldöntése után váltogatni kell a színeket. Tehát ha $k$ ,,szakasz'' van, akkor $2^k$ a színezések száma az adott esetben. Így összesen $3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 = 24 + 16 + 2 = 42$ eset van, amikor kékkel kezdünk. Tehát a lehetőségek száma $3 \cdot 42 = 126$.

**Negyedik megoldás.** Írjuk fel egy körvonalra a piros, kék és zöld színeket. Egy jó gyöngysornak megfelel egy lépéssorozat a körvonalon, ahol minden lépésben az óramutató járásával megegyező vagy ellenkező irányban lépünk, és a végén ugyanoda lyukadunk ki, ahonnan indultunk. Ez azzal egyenértékű, hogy az óramutató járásával megegyező és ellentétes lépések hármas maradéka megegyezik. Mivel összesen 7-et lépünk, így a lehetőségek: 5 lépés az óramutató járásával megegyező irányban, 2 ellentétesen, illetve ez az eset a megegyező és ellentétes szavakat felcserélve. Mivel bármely színről indulhatunk, a válasz: $3(7 \cdot 6/2 + 7 \cdot 6/2)$, ami 126.

4. Egy téglatest minden élének hosszúsága egyjegyű pozitív egész szám. Minden lapra ráírtuk a területét. A lapokon lévő számok reciprokait összeadva az eredmény $\frac{2}{7}$. Mekkorák a téglatest élei?

Jelölje a téglatest éleit $x, y, z$. Így a feltételt kifejezhetjük az alábbi módon:

$$\frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{zx} = \frac{2}{7},$$

ahonnan rendezés után adódik, hogy

$$7(x + y + z) = xyz.$$

A bal oldal oszható 7-tel, így a jobb oldal is. De mivel az élek hosszúsága egyjegyű egész szám, a 7 pedig prím, így valamelyik élhossznak 7-nek kell lennie. Legyen ez mondjuk a $z$. Így az alábbi egyenlethez jutunk:

$$x + y + 7 = xy,$$

ami szorzattá alakítással az alábbi alakra hozhatunk:

$$(x - 1)(y - 1) = 8.$$

Tegyük fel, $x \geq y$, azaz az első tényező legalább akkora, mint a második. Figyelembe véve, hogy a bal oldal tényezői nemnegatívak, így a lehetséges felbontások:

$$8 \cdot 1; \quad 4 \cdot 2$$

ahonnan rögtön adódnak a megoldások: $(9; 2; 7)$ és $(5; 3; 7)$. Természetesen ezek bármely más sorrendje is jó megoldás, hiszen a $z = 7$, illetve $x \geq y$ feltételek önkényesek voltak, az ismeretlenek szerepe pedig szimmetrikus.

**Megjegyzés**: Mivel egyjegyű pozitív egész számokról van szó a feladatban, az $x+y+7 = xy$ egyenlet próbálgatással is megoldható, természetesen az ilyen megoldások is teljes értékűek.

5. Tamás 9 könyvet vásárolt, amelyeknek az ára csupa különböző 2-hatvány volt. A boltban olyan akció volt, hogy bármely 3 könyvből a legolcsóbbat ingyen kapta a vásárló. Hány különböző áron kaphatja meg Tamás a 9 könyvet? (A végösszeget ne kerekítsük.)

Bármilyen módon végzik is el a könyvek csoportosítását, a legolcsóbb könyvet ingyen kapja meg Tamás, míg a két legdrágábbat ki kell fizetnie. Helyezzük el a könyveket egy sorban áraik szerint növekvő rendben, balról kezdve a legolcsóbbal. Jelöljük meg azokat a könyveket, melyeket Tamás ingyen kaphat. Az alábbiakban felsoroljuk a lehetséges eseteket (1 jelöli az ingyenes könyveket):

- 1aa1bb1cc
- 1a1abb1cc
- 11aabb1cc
- 1aa1b1bcc

- 1a1ab1bcc
- 11aab1bcc
- 1aa11bbcc
- 1a1a1bbcc
- 11aa1bbcc
- 1a11abbcc
- 11a1abbcc
- 111aabbcc

A kitöltés logikája: minden 1-estől jobbra legyen két nem ingyenes könyv, mely csakis hozzá tartozik, ezeket jelölik az $a$, $b$ és $c$ betűk. Az előző felsorolásban nem szereplő esetből csak három van, és ezekben a legolcsóbb és a második legolcsóbb ingyenes könyv között legalább három nem ingyenes könyv van, ami lehetetlen. Már csak azt kell megvizsgálni, hogy az ingyen kapott könyvek összára hány esetben különbözik. Mivel a legolcsóbb minden esetben ingyenes, így a másik kettő ára a lényeges, foglalkozzunk csak azokkal. Ha két olyan csoportosítást nézünk, melyben az egyik ingyenes könyv közös, akkor a másik ingyenes könyv nem az, így ekkor más-más árat jelent a két csoportosítás. Ezek után tekintsünk két olyan csoportosítást, melyben a két-két ingyenes könyv más-más. Most használjuk ki azt, hogy a könyvek árai különböző 2-hatványok. Legyenek az egyik csoportosításban szereplő ingyenes könyvek árai $2^x, 2^y$, a másikban pedig $2^z, 2^u$. Tegyük fel, hogy közülük $2^u$ a legnagyobb. Ekkor:

$$2^u = 2^{u-1} + 2^{u-1} > 2^x + 2^y,$$

felhasználva, hogy $x$ és $y$ különbözőek, és legfeljebb $u-1$-gyel egyenlők. Ez azt jelenti, hogy ekkor is különböző árat fizettünk a három-három könyvért. Beláttuk hát, hogy a felsorolt 12 csoportosítás mindegyikében más-más az ingyenes könyvek ára, vagyis a kifizetendő könyvek ára is egyben. A válasz tehát: 12.

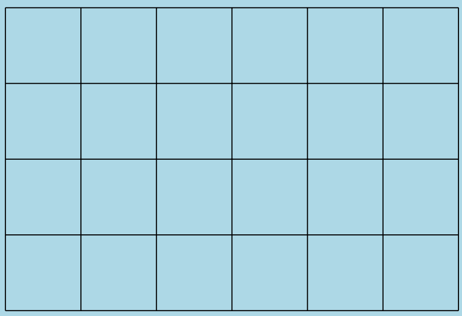
*Megjegyzés*: Annak igazolásánál, hogy különböző kiválasztásoknál más és más árat fizetünk a kilenc könyvért, arra is lehet hivatkozni, hogy a kettes számrendszerben más és más módon felírt számok értéke más és más lesz.

1. 4 testvér (akik között nincsenek ikrek) beszélget születésük sorrendjéről. Kettő közülük hazudik, kettő igazat mond.
**András**: Dávid a legfiatalabb.
**Boldizsár**: Dávid a legöregebb és Boldizsár a legfiatalabb.
**Csilla**: Én születtem legkésőbb.
**Dávid**: Sem legfiatalabb, sem legöregebb nem vagyok.
Melyik két testvér állítása igaz?

András, Boldizsár és Csilla közül akárhogy is választunk ki kettőt, azok ellentmondanak egymásnak. Ez azt jelenti, hogy Dávid igazat mond.
Mivel Dáviddal ellentéteset állít mind András, mind pedig Boldizsár, így a másik, aki igazat mond, csakis Csilla lehet.
Ezek után egy lehetséges születési sorrend: András, Dávid, Boldizsár, Csilla. Látható, hogy ennek a sorrendnek pontosan Csilla és Dávid állítása felel meg.

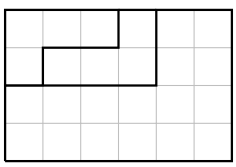
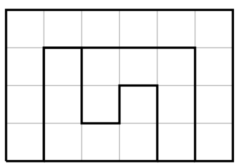
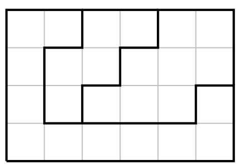
2. Ossz fel egy $6 \times 4$-es téglalapot a rácsvonalak mentén 3 részre úgy, hogy mindegyik rész
   a) hatszög
   b) nyolcszög
   c) tízszög

   legyen! Elég csak a felosztásokat megadni, nincs szükség indoklásra.



Minden esetben több megoldás is elképzelhető. Egy-egy példa:

(a) Három hatszög: (b) Három nyolcszög: (c) Három tízszög:

3. Aladár és Pisti kitalálós játékot játszanak egy $5 \times 5$-ös táblán. Pisti titokban kiválaszt és megjegyez a tábláról 18 mezőt, ezeket kell Aladárnak kitalálnia. Aladár úgy kérdezhet, hogy bejelöl a táblán 18 mezőt. Ezekről Pisti megmondja, hogy közülük melyek szerepelnek az általa gondolt mezők között. Ezután Aladár újra 18 mező megjelölésével kérdezhet, amelyre Pisti megint válaszol, és így tovább. Mennyi az a legkevesebb kérdés, amelyet ügyesen feltéve Aladár szerencse nélkül is biztosan meghatározhat 12 mezőt a gondoltak közül?

Mivel Pisti 7 mezőt nem jelöl be ($25 - 18 = 7$), így Aladár legfeljebb 7 ,,rosszat", ezt a 7-et színezheti be, vagyis az első kérdéssel legalább 11 mezőt eltalál. Ezen a 11 mezőn kívül 14 mező van még, amiből Aladár már tudja, hogy melyik az a legfeljebb 7 mező, amit Pisti nem jelölt be, s így azt is, hogy melyiket igen. Több kérdésre tehát nincs szüksége, a válasz: 1. Ha Aladár az első kérdésével 7-nél kevesebb ,,rosszat" talált el, akkor viszont legalább 12 ,,jót" jelölt, ekkor is elég 1 kérdés.

4. Adottak a következő törtek:
$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}.$$
Minden lépésben készíthetünk egy új számot úgy, hogy a következő két művelet valamelyikének végeredményével bővítjük az eddigi számok halmazát:

- egy meglévő számban felcseréljük a számlálót és a nevezőt;
- egy meglévő számot kivonunk 1-ből.

Hány számot kaphatunk így, ha akárhány lépést elvégezhetünk? (Az újonnan kapott számot a következő lépésben már felhasználhatjuk.)
(A törteknek minden esetben a legegyszerűbb alakját használd! Pl.: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ és $\frac{3}{1} = 3$.)

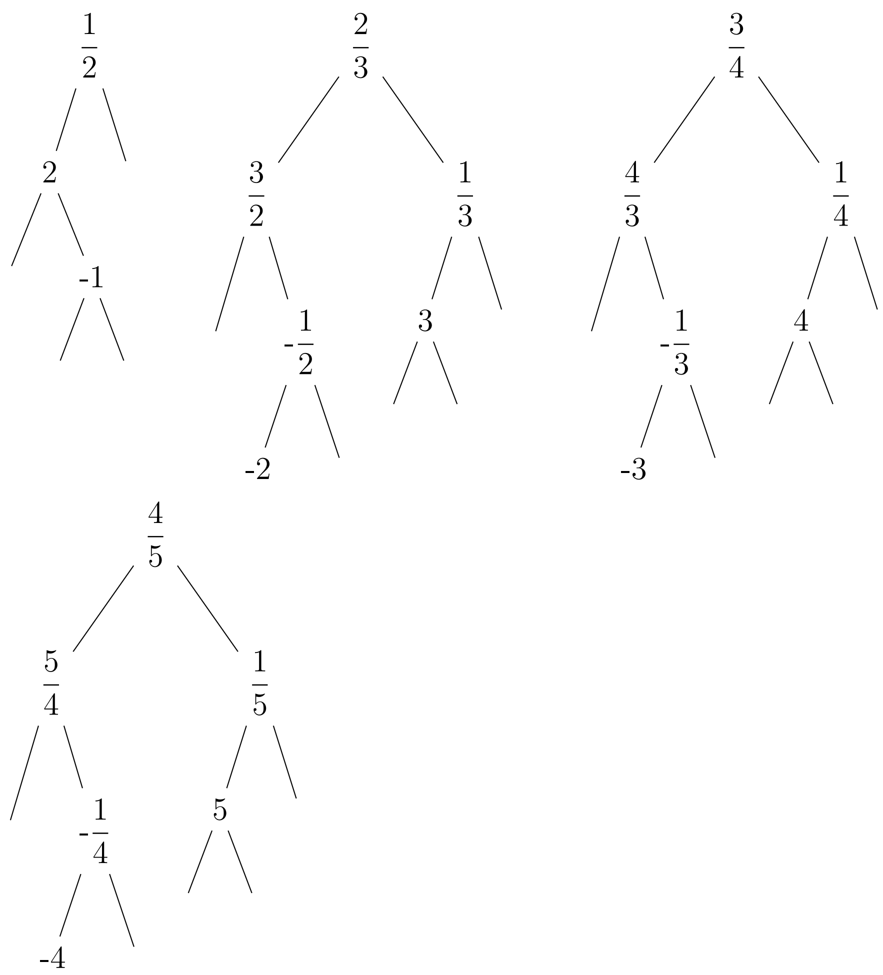
Vegyük sorban az adott számokat, és szemléltessük a ábrán a kérdéses változtatásokat. A bal oldali ágak mindig az első átalakítást jelentik, a jobb oldaliak pedig a másodikat. Ha már korábban szereplő számhoz jutunk, akkor ezt már nem szerepeltetjük újra, és itt a lépés-sorozat véget ér.
Az $\frac{1}{2}$-ből nyerhető új számok: $2, -1$.

A $\frac{2}{3}$-ból nyerhető új számok: $\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 3, -2$.

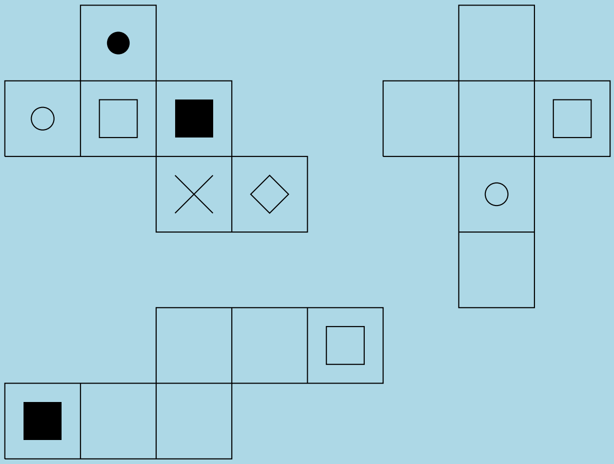
A $\frac{3}{4}$-ból nyerhető új számok: $\frac{4}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, 4, -3$.

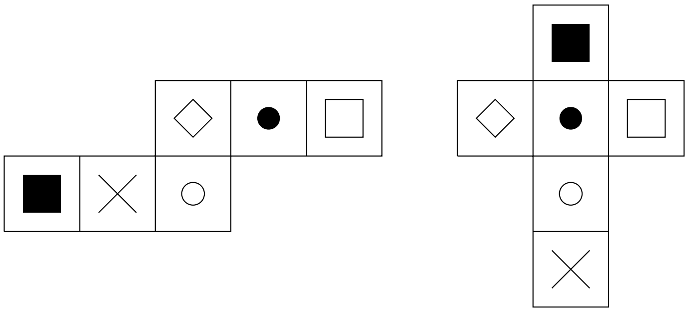
A $\frac{4}{5}$-ból nyerhető új számok: $\frac{5}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{4}, 5, -4$.

Összesen 21 szám fog szerepelni a megadottakkal együtt.


1/2
2
-1
2/3
3/2
1/3
-1/2
3
-2
3/4
4/3
1/4
-1/3
4
-3
4/5
5/4
1/5
-1/4
5
-4

5. Egy papírból készült kocka lapjaira kívülről mintákat rajzoltunk. Ezután szétnyitottuk a kockát, kiterítettük, így az első ábrán látható hálót kaptuk. A másik két hálóból pontosan ugyanilyen kockát szeretnénk hajtogatni.
Rajzold be a hiányzó mintákat a megfelelő négyzetekbe! (A papír nem átlátszó, és a mintát csak az egyik oldalon rajzoljuk meg.) Elegendő megadni a helyes ábrát, nincs szükség indoklásra.





1. Egy 14 fős baráti társaságban üveggolyókat gyűjtenek: pirosat, zöldet és sárgát. A következőket tudjuk:

(1) Akinek nincs zöld, annak van piros vagy sárga.

(2) Akinek nincs sárga, annak van piros.

(3) Közülük 7-nek pontosan 2-féle üveggolyója van.

(4) Ötüknek eddig csak 1-félét sikerült gyűjteni.

Válaszolj az alábbi kérdésekre:

a) Hánynak nincs eddig még üveggolyója?

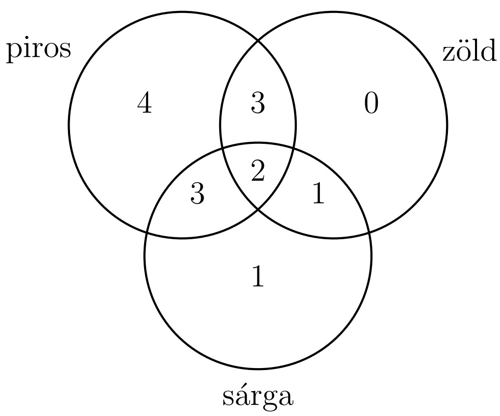
b) Hánynak van mindhárom fajta?

c) Van-e olyan társaság, melyre az összes feltétel teljesül?

a) Nincs közöttük olyan személy, akinek ne lenne legalább egy üveggolyója, hiszen a feltétel értelmében, akinek nincs zöld golyója, annak van más színű.

b) Mivel 5-nek van pontosan 1-féle, 7-nek pontosan 2-féle színű üveggolyója,ez 12 fő, továbbá mindenkinek van legalább az egyik színből és összesen 14-en vannak, így $14 - 12 = 2$ ember van a társaságban, akinek mindhárom színű üveggolyója van.

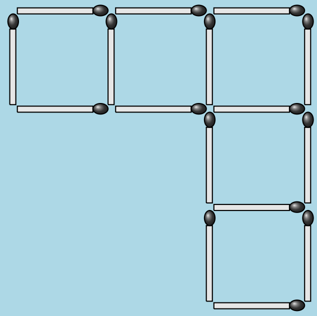
c) Egy lehetséges esetet mutat az alábbi ábra:




*Megjegyzés:* Csak zöld golyója egyetlen egy embernek sem lehet, máskülönben egy ilyen személyre nem teljesülne a (2) feltétel.

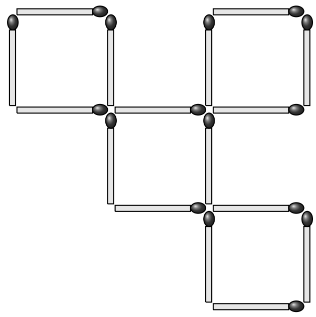
2.

a) Helyezz át az ábrán két gyufaszálat úgy, hogy a négyzetek száma 4-re csökkenjen, és minden gyufaszál valamelyik négyzet teljes oldalát alkossa.



b) Hány megoldás lehetséges? (Két megoldás különböző, ha az áthelyezések után valamelyikben van gyufa egy olyan helyen, ahol a másikban nincs.)

a) Összesen 16 szál gyufánk van, amikből csakis úgy képezhetünk 4 négyzetet a feltételek szerint, hogy minden gyufaszál pontosan egy négyzetnek alkotja a teljes oldalát (azaz nincsenek közös oldalú négyzetek).



b) A két gyufaszál elvételével meg kell szüntetnünk két négyzetet, és létre kell hoznunk egy újat. Ez csak úgy lehetséges, hogy oda helyezzük le a gyufaszálakat, ahol már egy leendő négyzet két oldala megvan. Ezt kizárólag az ábrán látott módon tehetjük meg. Mivel két gyufaszálat mozgatunk, és két helyre tesszük le őket, így csak egyetlen megoldás létezik.

3. Azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.

$$\begin{array}{r} ABCD \\ DABC \\ CDAB \\ +\quad CDA \\ \hline CCCCB \end{array}$$

Add meg az $ABCD$ négyjegyű szám összes lehetséges értékét!

Három különböző számjegy összegének maximuma 24, négynek pedig 30, így $C$ értéke 1 vagy 2.

a) $C = 1$:

$$\begin{array}{r} AB1D \\ DAB1 \\ 1DAB \\ +\quad 1DA \\ \hline 1111B \end{array}$$

Az egyesek helyén történő összeadás miatt $A + D = 9$. Itt 1-et továbbviszünk, s így a tízesek helyén történő összeadás miatt $B = 0$. A többi összeadás ekkor már teljesül. Az összes lehetséges eset:

$$2017,\ 3016,\ 4015,\ 5014,\ 6013,\ 7012.$$

(Ahány szám hiányzik, annyival kevesebb pont jár ebből a 3 pontból.)

b) $C = 2$:

$$\begin{array}{r} AB2D \\ DAB2 \\ 2DAB \\ +\quad 2DA \\ \hline 2222B \end{array}$$

Az egyesek helyén történő összeadás miatt $A + D = 8$. Itt 1-et továbbviszünk, s így a tízesek helyén történő összeadás miatt $B = 1$. A százasok helyén álló számjegyek összeadása ekkor teljesül, viszont az ezresek helyén állóké nem, hiszen itt: $A+D+2 = 10$, amihez hozzáadva a százasok összeadásából keletkező 1-et, 11-et kapunk, ami nem 2-re végződik. Ekkor tehát nincs megoldás.

4. Be lehet-e írni az alábbi számokat egy $3 \times 3$-as táblázat mezőibe úgy, hogy minden sorban egyenlő legyen a számok összege, és minden oszlopban is egyenlő legyen a számok összege?

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

b) 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4

c) 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11

a) Igen. Mivel a 9 szám összege 45, ezért soronként és oszloponként is 15 a számok összege. Egy lehetséges kitöltés:

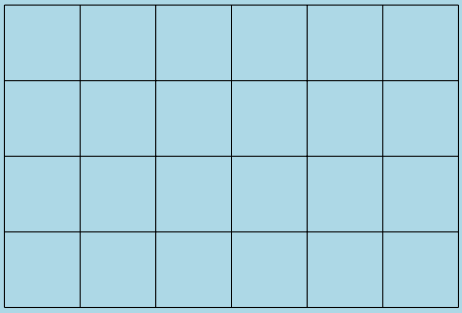
| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

b) Nem. A számok összege 29, ami nem osztható hárommal, míg a három egyenlő sorösszeg összege csak hárommal osztható számot adhat.

c) Nem. A számok összege 48, ezért az egyenlő sor- és oszlopösszegek értéke 16 lenne. Nézzük a 11 sorát és oszlopát egy feltételezett jó kitöltésben. Csak kétféle módon egészíthető ki 11 16-ra a megadott számokkal: $11 + 0 + 5$ és $11 + 1 + 4$. Most nézzük a 10 sorát és oszlopát (amik különböznek 11 sorától és oszlopától). A 10 mellé 6 összegű számpár kellene, de ilyet nem találunk a megmaradt számok között. A beírás tehát nem lehetséges.

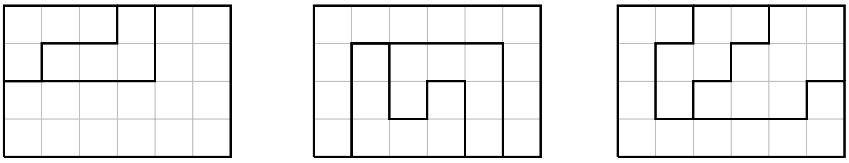
1. Ossz fel egy $6 \times 4$-es téglalapot a rácsvonalak mentén 3 részre úgy, hogy mindegyik rész
   a) hatszög
   b) nyolcszög
   c) tízszög

   legyen! Elég csak a felosztásokat megadni, nincs szükség indoklásra.



Minden esetben több megoldás is elképzelhető. Egy-egy példa:

(a) Három hatszög: (b) Három nyolcszög: (c) Három tízszög:



2. Van egy 4 számból álló halmazunk. Minden lépésben egy új négyelemű halmazt gyártunk úgy, hogy elkészítjük bármely 3 szám összegét. Három ilyen lépés után a $\{63; 68; 69; 70\}$ halmazt kaptuk. Mi volt az eredeti négy szám?

*Első megoldás.* Minden lépésben az adott halmaz minden elemét 3 új elem létrehozásakor használunk fel. Emiatt minden lépésben a halmazban lévő számok összege 3-szorosa a megelőző halmazban lévő számok összegének. A végén az összeg $63 + 68 + 69 + 70 = 270$. Emiatt egy lépéssel korábban az összeg 90, azt megelőzően 30, és a kiinduló halmazban pedig 10.

Egy lépésben keletkező új számok olyanok, hogy egy régi elemmel kisebbek az előző 4 szám összegénél. Így ha a végén a legkisebb számnál 5-tel, 6-tal illetve 7-tel nagyobb a többi, akkor az előző lépésben a legnagyobbnál 5-tel, 6-tal, 7-tel kisebb volt a többi, még eggyel korábban ismét ennyivel nagyobbak, mint a legkisebb, és a kiinduláskor pedig ennyivel kisebbek, mint a legnagyobb.

Keresünk tehát négy egész számot, amiknek az összege 10, és a legnagyobbnál 5-tel, 6-tal, illetve 7-tel kisebb a másik 3. Ilyen számnégyes csak a $0, 1, 2, 7$.

*Második megoldás.* Minden lépésben az adott halmaz minden elemét 3 új elem létrehozásakor használunk fel. Emiatt minden lépésben a halmazban lévő számok összege 3-szorosa a megelőző halmazban lévő számok összegének. A végén az összeg $63+68+69+70 = 270$. Emiatt egy lépéssel korábban az összegnek 90-nek kellett lennie. Ebben az utolsó lépés előtti halmazban a három legnagyobb szám összege 70, ezt a 90-ből kivonva megkapjuk, hogy ekkor a legkisebb szám a 20 volt.

Ugyanígy a többi elem is meghatározható: $90-69=21$, $90-68=22$ és $90-63=27$. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy még egy lépéssel korábban 30 volt az összeg, a számok pedig 3, 8, 9 és 10. Ugyanígy adódik, hogy az első lépést megelőzően 10 volt az összeg, az eredeti négy szám pedig 0, 1, 2 és 7.

*Harmadik megoldás.* Legyen az eredeti halmaz $\{a;b;c;d\}$, ahol $a<b<c<d$. (Ez utóbbi feltételezhető, mert egy halmaz elemei különböznek.) A három lépés így módosítja az elemeket:

$$\begin{aligned}&\{a;b;c;d\}\to\\&\{a+b+c;\quad a+b+d;\quad a+c+d;\quad b+c+d\}\to\\&\{3a+2b+2c+2d;\quad 2a+3b+2c+2d;\quad 2a+2b+3c+2d;\quad 2a+2b+2c+3d\}\to\\&\{7a+7b+7c+6d;\quad 7a+7b+6c+7d;\quad 7a+6b+7c+7d;\quad 6a+7b+7c+7d\}\end{aligned}$$

Az eredeti feltétel miatt a kapott négyesek is különböző számokból állnak. Ha az eredeti halmazban $S=a+b+c+d$ a számok összege, akkor a lépések után kapott halmazok elemeinek összege rendre $3S$, $9S$ és $27S$. Innen $27S=63+68+69+70=270$, vagyis $S=10$.

Az utolsó halmazban az elemek

$$\{7S-d;\quad 7S-c;\quad 7S-b;\quad 7S-a\},$$

ezek 70-nél éppen $d$-vel, $c$-vel, $b$-vel és $a$-val kisebbek és ez a halmaz megegyezik a $\{63;68;69;70\}$ halmazzal. Innen az eredeti négy szám: $\{0;1;2;7\}$.

3. Meg lehet-e adni 50 egész számot úgy, hogy az összegük egy 10-nél nagyobb prímszám, a szorzatuk pedig egy ennél 1-gyel kisebb négyzetszám legyen?

17 egy olyan prímszám, aminél az eggyel kisebb szám négyzetszám. Próbáljunk meg megadni számokat úgy, hogy összegük 17 legyen, szorzatuk pedig 16.
Legyen az egyik szám 16, az összes többi, pedig vagy 1 vagy $-1$. Ekkor páros sok $-1$-re van szükségünk, hogy a szorzat 16 legyen és eggyel több 1-re, mint $-1$-re, hogy az összegük 17 legyen. Ha tehát a számaink: 1 darab 16, 25 darab 1 és 24 darab $-1$, akkor ezek a számok megfelelnek a feltételnek:

$$16+25\cdot 1+24\cdot(-1)=17$$
$$16\cdot 1^{25}\cdot(-1)^{24}=16$$

Tehát a feltett kérdésre igen a válasz.

4. Egy többjegyű pozitív egész számot különlegesnek nevezünk, ha nincs benne 0 számjegy, és bárhol kettévágva a kapott számok közül az egyik osztója a másiknak. Az 1442 például különleges, mert az 1 osztója a 442-nek, a 14 osztója a 42-nek, valamint a 144-nek osztója a 2.
Hány különleges szám van 500000 és 600000 között?

Mivel a 0 nem megengedett számjegy, a különleges számok alakja $\overline{5abcde}$, továbbá $5 \mid \overline{abcde}$ miatt $e = 5$. Mivel $e \mid \overline{5abcd}$ és $e = 5$, ezért $d = 5$. Tudjuk, hogy $\overline{5a} \mid \overline{bc55}$ és $\overline{55} \mid \overline{5abc}$. A második feltétel miatt $c$ is 5. Most két háromjegyűre vágva a számot vagy $\overline{5ab} \mid \overline{555}$ vagy $\overline{555} \mid \overline{5ab}$ kell, hogy teljesüljön. Mivel mindkét szám 500-nál nagyobb, csak egyenlők lehetnek, mert már a kétszeresük is négyjegyű. Innen azt kaptuk, hogy $a = b = 5$. Az egyetlen különleges szám tehát a megadott intervallumban az 555555.

5. Aladár és Pisti kitalálós játékot játszanak egy $10 \times 10$-es táblán. Pisti titokban kiválaszt és megjegyez a tábláról 18 mezőt, ezeket kell Aladárnak kitalálnia. Aladár úgy kérdezhet, hogy bejelöl a táblán 18 mezőt. Ezekről Pisti megmondja, hogy közülük melyek szerepelnek az általa gondolt mezők között. Ezután Aladár újra 18 mező megjelölésével kérdezhet, amelyre Pisti megint válaszol, és így tovább. Mennyi az a legkevesebb kérdés, amelyet ügyesen feltéve Aladár szerencse nélkül is biztosan meghatározhat 9 mezőt a gondoltak közül?

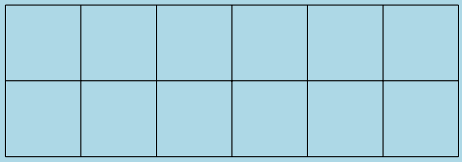
Négy kérdés nem lehet elég, hiszen négy kérdésből legfeljebb $4 \cdot 18 = 72$ mezőre tud Aladár rákérdezni, és elképzelhető, hogy minden Pisti által megjelölt mező a maradék 28 között van. A 28 megmaradt mezőből bármelyik 9 lehet jelöletlen, ezért Aladár nem tudhatja biztosan 9 jelölt mező helyét.

Öt kérdés elegendő. Aladár minden lépésben úgy jelöljön meg 18 mezőt, hogy ne legyen olyan mező, amit kétszer jelölt meg. Ekkor két lehetőség van:
1) Az $5 \cdot 18 = 90$ megkérdezett mező között volt 9 Pisti mezői közül és akkor Aladár tudja biztosan 9 megjelölt mező helyét.

2) Ha az öt kérdésben lefedett 90 mező legfeljebb 8-at tartalmaz Pisti mezői közül, akkor a maradék $100 - 90 = 10$ mező már mind megjelölt és ezek helyét Aladár ismeri, ezekre már nem kell rákérdeznie.

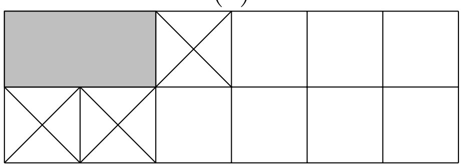
6. osztály, 2. nap — Országos döntő

1. Gyula bácsi legkedvesebb galambjait egy $6\times2$-es elrendezésű galambdúcban őrzi. A legjobb tenyészpárjának tagjait, Királyt és Dámát egy szinten lévő, szomszédos dúcokban helyezte el. Sem alattuk, sem felettük, sem a szomszédos dúcokban nincs másik galamb. A legjobb madarát, Ászt, és a legígéretesebbet, Bubit egy-egy fennmaradó dúcba költöztette. Hányféle elrendezésben lakhatnak Gyula bácsi kedvenc madarai?

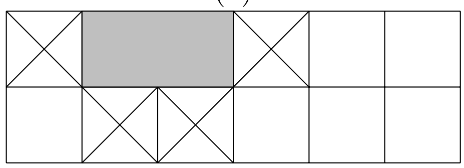


A Király és Dáma által elfoglalt dúcok elhelyezkedése szerint kétféle esetet különböztetünk meg: (1) az emelet ,,szélén” vannak; (2) az emelet ,,belsejében” vannak. Az ábrán $X$ jelöli azokat a dúcokat, ahova nem kerülhet galamb.

(1)



(2)



Mindkét esetben kétféle módon lehet elhelyezni Királyt és Dámát a szürke téglalapon belül.

Az (1) esetben négy helyen lehet a szürke téglalap és a fennmaradó 7 dúcban $7\cdot6=42$-féle módon lehet Ász és Bubi.

A (2) esetben hat helyen lehet a szürke téglalap és a fennmaradó 6 dúcban $6\cdot5=30$-féle módon lehet Ász és Bubi.

Így összesen $2\cdot(4\cdot42+6\cdot30)=696$ lehetőség van.

2. Be lehet-e írni az alábbi számokat egy $3\times3$-as táblázat mezőibe úgy, hogy minden sorban ugyanannyi legyen a számok összege, és minden oszlopban is ugyanannyi legyen a számok összege?

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

b) 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4

c) 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11

a) Igen. Mivel a 9 szám összege 45, ezért soronként és oszloponként is 15 a számok összege. Egy lehetséges kitöltés:

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

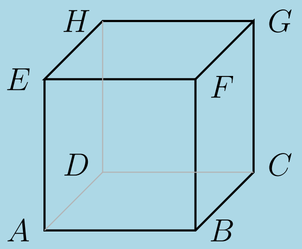
b) Nem. A számok összege 29, ami nem osztható hárommal, míg a három egyenlő sorösszeg összege csak hárommal osztható számot adhat.

c) Nem. A számok összege 48, ezért az egyenlő sor- és oszlopösszegek értéke 16 lenne. Nézzük a 11 sorát és oszlopát egy feltételezett jó kitöltésben. Csak kétféle módon egészíthető ki 11 16-ra a megadott számokkal: $11 + 0 + 5$ és $11 + 1 + 4$. Most nézzük a 10 sorát és oszlopát (amik különböznek 11 sorától és oszlopától). A 10 mellé 6 összegű számpár kellene, de ilyet nem találunk a megmaradt számok között. A beírás tehát nem lehetséges.

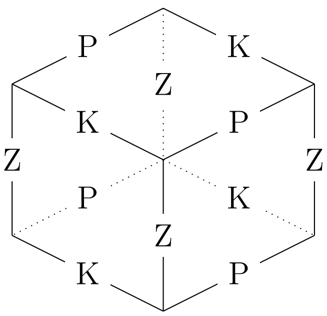
3. Színezd meg egy kocka éleit úgy, hogy minden csúcsban az egy csúcsba futó élek különböző színűek legyenek.

a) Legkevesebb hány színnel oldható meg ez a színezés?

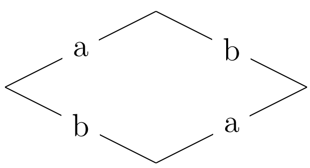
b) A legkevesebb színt használva hány különböző megoldás van, ha két megoldást különbözőnek tekintünk, ha van olyan él (pl. $BF$), amelynek színe a két megoldásban különböző?

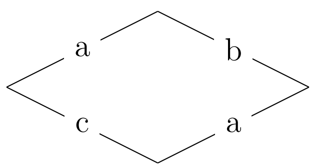


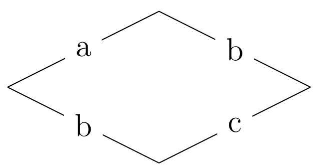

a) Három szín szükséges, hiszen egy csúcsba három él fut be. Ennyi elegendő is:




b) Rögzítsük az előző ábra felső csúcsából induló három él színét! Ezt 6 különböző módon tehetjük meg. Ha tehát rögzítjük ezt a három színt, akkor az így kapott jó színezések hatszorosa lesz a válasz. Most ágazzunk szét aszerint, hogyan néz ki a felső lap. Erre három lehetőség van.

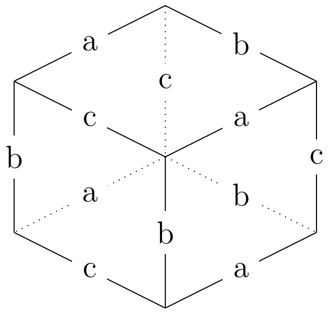


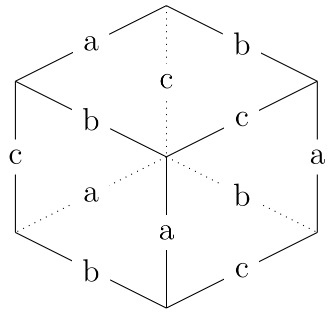





Ha most a szabály betartásával szeretnénk befejezni a színezést, akkor az első esethez két befejezés tartozik: ,,lefelé” minden él $c$, az alsó lap pedig a fenti ábrának megfelelő, vagy annak 90°-os elforgatottja.

A másik két eset befejezése egyértelműen meghatározott:




Tehát összesen $6 \cdot (2 + 1 + 1) = 24$ a különböző színezések száma.

4. A sakktábla A1 mezőjéről sétálni indul egy vezér. Egy lépésben balra, jobbra, felfelé, lefelé vagy a 4 átlós irány bármelyikében léphet akármennyit. Csak olyan mezőre léphet, amelyen még előzőleg nem járt. Nem lehet két egyforma lépése, azaz amelyeknek az iránya és nagysága is megegyezik.

a) Lehetséges-e olyan séta, amelynek során a vezér a sakktábla első két sorának minden mezőjét bejárja, de más mezőre nem lép?

b) Lehetséges-e olyan séta, amelynek során a vezér a sakktábla minden mezőjét bejárja?

c) Lehetséges-e olyan séta, amelynek során a vezér nem lép a 8. sor és a H oszlop mezőire, minden más mezőre viszont igen?

Megjegyzés: egy $2 \times 3$-as téglalap bejárható ilymódon. Az alábbi ábra mutatja a bejárást. A mezőben álló szám jelzi, hogy hányadik lépésben lép a vezér arról a mezőről. Ha a fentiek közül valamelyik feladat megoldható, akkor a megoldást ilyen formában add meg:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 2 | 4 |
| 1 | 1 | 5 | 3 |
| | A | B | C |

a) Igen, lehetséges. Az alábbi ábra mutat egy lehetséges bejárást.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 16 | 14 | 12 | 10 | 9 | 11 | 13 | 15 |
| 1 | 1 | 3 | 5 | 7 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| | A | B | C | D | E | F | G | H |

b) A vezérnek jobbra, balra, felfelé és lefelé is 7-féle lehetséges lépése van. Ugyanez a helyzet mind a négy átlós lépés esetén is. Összesen tehát $8 \cdot 7 = 56$ különböző lépése van a vezérnek. A teljes tábla bejárásához 63 lépésre van szükség, tehát nincs ilyen bejárás.

c) Most minden irányban 6-féle lépés lehetséges, vagyis összesen $8 \cdot 6 = 48$ féle. A bejáráshoz 48 lépésre van szükség (hiszen 49 mezőből áll a bejárandó terület), így minden lehetséges lépést fel kellene használni. Ez azonban nem lehetséges, hiszen balra lefelé átlós irányban hetet lépni csak a G7 mezőről lehetséges, ekkor azonban visszalépnénk a kiindulási mezőre. Ilyen bejárás tehát szintén nem lehetséges.

7. osztály, 1. nap — Országos döntő

1. Előállítható-e a 22222244444 szám öt egymást követő egész szám szorzataként?

*Első megoldás.* Öt egymást követő szám közül mindig van (pontosan) egy, amelyik osztható 5-tel. Az öt szám szorzata ennek többszöröse, így maga is osztható 5-tel. Egy szám pontosan akkor osztható 5-tel, ha az utolsó jegye osztható 5-tel. Mivel a 4 nem osztható 5-tel, így a 22222244444 sem. Mivel öt egymást követő egész szám szorzataként csak 5-tel osztható számok állítható elő, a kérdéses előállítás nem létezik.

*Második megoldás.* Az előző megoldáshoz hasonló gondolatmenet a 3-mal való oszthatóságra is alkalmazható: öt egymást követő szám között mindig van hárommal osztható is, így a szorzat is osztható 3-mal. Azonban a 22222244444 nem osztható 3-mal, mivel számjegyeinek összege (32) nem osztható 3-mal. Így az előállítás nem lehetséges.

2. Van egy négy számból álló halmazunk. Minden lépésben egy új négyelemű halmazt készítünk úgy, hogy az összes lehetséges módon elkészítjük a meglévő halmazból három szám összegét. Három lépés után a $\{63, 68, 69, 70\}$ halmazt kaptuk. Mi volt az eredeti négy szám?

*Első megoldás.* Minden lépésben az adott halmaz minden elemét 3 új elem létrehozásakor használunk fel. Emiatt minden lépésben a halmazban lévő számok összege 3-szorosa a megelőző halmazban lévő számok összegének. A végén az összeg $63 + 68 + 69 + 70 = 270$. Emiatt egy lépéssel korábban az összeg 90, azt megelőzően 30, és a kiinduló halmazban pedig 10.

Egy lépésben keletkező új számok olyanok, hogy egy régi elemmel kisebbek az előző 4 szám összegénél. Így ha a végén a legkisebb számnál 5-tel, 6-tal illetve 7-tel nagyobb a többi, akkor az előző lépésben a legnagyobbnál 5-tel, 6-tal, 7-tel kisebb volt a többi, még eggyel korábban ismét ennyivel nagyobbak, mint a legkisebb, és a kiinduláskor pedig ennyivel kisebbek, mint a legnagyobb.

Keresünk tehát négy egész számot, amiknek az összege 10, és a legnagyobbnál 5-tel, 6-tal, illetve 7-tel kisebb a másik 3. Ilyen számnégyes csak a $0, 1, 2, 7$.

*Második megoldás.* Minden lépésben az adott halmaz minden elemét 3 új elem létrehozásakor használunk fel. Emiatt minden lépésben a halmazban lévő számok összege 3-szorosa a megelőző halmazban lévő számok összegének. A végén az összeg $63+68+69+70 = 270$. Emiatt egy lépéssel korábban az összegnek 90-nek kellett lennie. Ebben az utolsó lépés előtti halmazban a három legnagyobb szám összege 70, ezt a 90-ből kivonva megkapjuk, hogy ekkor a legkisebb szám a 20 volt.

Ugyanígy a többi elem is meghatározható: $90-69 = 21$, $90-68 = 22$ és $90-63 = 27$. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy még egy lépéssel korábban 30 volt az összeg, a számok pedig 3, 8, 9 és 10. Ugyanígy adódik, hogy az első lépést megelőzően 10 volt az összeg, az eredeti négy szám pedig 0, 1, 2 és 7.

*Harmadik megoldás.* Legyen az eredeti halmaz $\{a; b; c; d\}$, ahol $a < b < c < d$. (Ez utóbbi feltételezhető, mert egy halmaz elemei különböznek.) A három lépés így módosítja az elemeket:

$$\begin{aligned}
&\{a; b; c; d\} \to \\
&\{a+b+c; \quad a+b+d; \quad a+c+d; \quad b+c+d\} \to \\
&\{3a+2b+2c+2d; \quad 2a+3b+2c+2d; \quad 2a+2b+3c+2d; \quad 2a+2b+2c+3d\} \to \\
&\{7a+7b+7c+6d; \quad 7a+7b+6c+7d; \quad 7a+6b+7c+7d; \quad 6a+7b+7c+7d\}
\end{aligned}$$

Az eredeti feltétel miatt a kapott négyesek is különböző számokból állnak. Ha az eredeti halmazban $S = a+b+c+d$ a számok összege, akkor a lépések után kapott halmazok elemeinek összege rendre $3S$, $9S$ és $27S$. Innen $27S = 63+68+69+70 = 270$, vagyis $S = 10$.

Az utolsó halmazban az elemek

$$\{7S-d; \quad 7S-c; \quad 7S-b; \quad 7S-a\},$$

ezek 70-nél éppen $d$-vel, $c$-vel, $b$-vel és $a$-val kisebbek és ez a halmaz megegyezik a $\{63; 68; 69; 70\}$ halmazzal. Innen az eredeti négy szám: $\{0; 1; 2; 7\}$.

3. $ABCDEF$ egy szabályos hatszög, melynek területe 1 területegység. (Az ábécé szomszédos betűi a hatszög szomszédos csúcsait jelölik.) $X$ a $CD$ oldal felezőpontja, $Y$ pedig az $EF$ oldalé. Mekkora az $ABCXYF$ hatszög területe? (A szabályos sokszögek minden oldala és szöge egyenlő.)

Jelölje a hatszög oldalának hosszát $a$. Tudjuk, hogy a hatszög hat darab szabályos háromszögből áll, így $FC = 2a$. Mivel $YX$ az $FCDE$ trapéz középvonala, ezért $YX = \frac{2a+a}{2} = \frac{3}{2}a$. Ha $m$ jelöli a szabályos háromszögek magasságát, akkor a feltétel értelmében

$$1 = 6 \cdot \frac{am}{2} \Longrightarrow am = \frac{1}{3}.$$

Azt is tudjuk továbbá, hogy az $FCXY$ trapéz magassága $\frac{m}{2}$. Ezek után a kérdéses terület:

$$T(ABCXYF) = T(ABCF) + T(FCXY) = \frac{1}{2} + \frac{2a+\frac{3}{2}a}{2} \cdot \frac{m}{2} = \frac{1}{2} + \frac{7}{8}am = \frac{19}{24}.$$

4. Egy többjegyű pozitív egész számot különlegesnek nevezünk, ha nincs benne 0 számjegy, és bárhol kettévágva a kapott két szám közül az egyik osztja a másikat. Például az 1442 különleges, mert az 1 osztója a 442-nek, a 14 osztója a 42-nek, és a 144-nek osztója a 2. Hány különleges szám van 800 000 és 900 000 között?

Egy szám pontosan akkor osztható 8-cal, 4-gyel, illetve 2-vel, ha az utolsó három, kettő, illetve egyetlen számjegyéből alkotott szám osztható a szóban forgó számmal. Jelölje a kérdéses számot $\overline{8abcde}$.

Mivel $8 \mid \overline{abcde}$, ezért $8 \mid \overline{cde}$, $4 \mid \overline{de}$ és $2 \mid e$.

Mivel $e \mid \overline{8abcd}$, ezért $2 \mid d$, és mivel $4 \mid \overline{de} \mid \overline{8abc}$, ezért $4 \mid \overline{bc}$ és $2 \mid c$.

A $\overline{8ab}$ és $\overline{cde}$ számok közül valamelyik osztja a másikat, ám $\overline{8ab}$ önmagánál nagyobb többszörösei legalább négyjegyűek, így $\overline{cde} \mid \overline{8ab}$. Ezért $8 \mid \overline{cde} \mid \overline{8ab}$, amiből $8 \mid \overline{ab}$, így $2 \mid b$.

Mivel $2 \mid d$ és $4 \mid \overline{de}$, ezért $4 \mid e$. Ebből $4 \mid e \mid \overline{8abcd}$, így $4 \mid \overline{cd}$. Mivel $2 \mid c$, ebből $4 \mid d$ is következik.

Mivel $4 \mid \overline{bc}$ és $2 \mid b$, ezért $4 \mid c$.

Mivel $2 \mid c$ és $4 \mid d$, ezért $8 \mid \overline{cd0}$, így $8 \mid \overline{cde}$-ből $8 \mid e$ is következik. Mivel a számban nincs 0 számjegy, ezért $e = 8$.

Így $e = 8 \mid \overline{8abcd}$ miatt $8 \mid \overline{bcd}$, és mivel $2 \mid b$ és $4 \mid c$, ezért $8 \mid \overline{bc0}$. Tehát $8 \mid d$, így mivel a szám nem tartalmaz nullát, $d = 8$.

Így $\overline{cde} = 488$ vagy $\overline{cde} = 888$, azonban előbbinek nincs $\overline{8ab}$ alakú többszöröse, utóbbiból pedig $\overline{8ab} = 888$ következik. Tehát 800 000 és 900 000 között egyetlen különleges szám van: a 888 888.

5. Beírtuk egy $6 \times 6$-os táblázat mezőibe az egész számokat 1-től 36-ig úgy, hogy az egymást követő számok oldalszomszédos mezőkbe kerültek, de a 4 többszöröseit tartalmazó mezőknek nincs közös csúcsa.

a) Mutasd meg, hogy ekkor a 36 csak valamelyik sarokmezőbe kerülhetett!

b) Adj példát a feltételeknek megfelelő kitöltésre!

Osszuk fel a $6 \times 6$-os táblázatot 9 darab $2 \times 2$-es táblázatra. Egy ilyen $2 \times 2$-es tartományban nem állhat egynél több 4-gyel osztható szám, hiszen ekkor a mezőiknek lenne közös csúcsa. Mivel 9 darab 4-gyel osztható szám van, ezért a fentiek miatt minden $2 \times 2$-es részbe pontosan egynek kell közülük kerülnie.

Színezzük ki a táblázatot sakktáblaszerűen. Látható, hogy ha egy mezőről mindig oldallal szomszédos mezőre lépve 4 lépésben eljutunk egy másik mezőre, akkor a két mező biztosan azonos színű. Ebből következik, hogy a 4-gyel osztható számokat tartalmazó mezők mind azonos színűek.

Vizsgáljuk a középső $2 \times 2$-es részt. Forgassuk úgy a táblázatot, hogy az ebben a részben szereplő 4-gyel osztható szám ($4k$) a jobb alsó mezőbe kerüljön.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | $X$ | $Y$ |
| | | | **4k** | $X$ | **4l** |
| | | $X$ | $X$ | $X$ | $Y$ |
| | | $Y$ | **4m** | $Y$ | **4n** |

Ekkor az ábrán $X$-szel jelölt mezőbe a szomszédság miatt, az $Y$-nal jelölt mezőkbe a színezés miatt nem kerülhet 4-gyel osztható szám. Így a $4l$, $4m$, $4n$ jelzésű mezők biztosan 4-gyel osztható számokat tartalmaznak. Ekkor a $4n-2$ és $4n+2$ számok csak olyan mezőre kerülhetnek, amely 2 lépésben elérhető $4n$-től, és nem 4-gyel osztható szám van rajta. Egyetlen ilyen mező van, ezért csak az egyik szám kerülhet beírásra, ami csak akkor teljesül, ha $4n = 36$. Tehát a 36 csak az egyik sarokmezőbe kerülhetett, hiszen a forgatás után a jobb alsó sarokban kell lennie.

Egy példa a megfelelő kitöltésre:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **4** | 5 | **8** | 9 | **12** | 13 |
| 3 | 6 | 7 | 10 | 11 | 14 |
| 2 | 23 | 22 | 19 | 18 | 15 |
| 1 | **24** | 21 | **20** | 17 | **16** |
| 26 | 25 | 30 | 31 | 34 | 35 |
| 27 | **28** | 29 | **32** | 33 | **36** |

**7. osztály, 2. nap** **Országos döntő**

1. Egy pozitív prímszámokból álló, növekedő sorozatban az egymást követő tagok különbsége 12. Melyik a leghosszabb ilyen sorozat?

*Első megoldás.* Mivel 12-vel növelünk, ezért minden lépésben 2-vel növekszik az egyesek helyén álló számjegy. Ha páros számmal kezdődik a sorozat, akkor csak egy elemű lehet, mert a 2 az egyetlen páros prím. Az utolsó számjegyek tehát az $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ halmazból kerülnek ki. Ráadásul valahonnan kezdve, ebben a sorrendben fogják egymást ciklikusan követni.

Ha egy sorozat legalább 5 elemből áll, akkor szerepel benne az 5, mint utolsó számjegy. Ekkor a szám maga is csak 5 lehet, mert az az egyetlen 5-re végződő prím. Az 5 viszont csak az első elem lehet, hiszen a pozitívak a sorozat elemei és 12-vel növekszik. A leghosszabb sorozat tehát: $5, 17, 29, 41, 53$.

*Második megoldás.* Tegyük fel, hogy a sorozat legalább 5 tagból áll. Vegyük észre, hogy a $p$, $p+12$, $p+24$, $p+36$ és $p+48$ számok mind különböző maradékot adnak 5-tel osztva, mert a lehetséges különbségeik 12, 24, 36 vagy 48 nem oszthatók 5-tel. Mivel 5-ös maradékból 5-féle van, az egyikük osztható 5-tel. Ez csak $p = 5$ lehet, mert pozitív prímekről van szó.

Tehát a legalább 5 tagból álló sorozatnak így kell kezdődnie: $5, 17, 29, 41, 53$, ami mind prím, tehát 5 tagja lehet a sorozatnak. 6 tagja viszont nem lehet, mert a következő szám, a 65 nem prímszám.

2. Az $ABC$ szabályos háromszög $BC$ oldalának belső pontja $X$, $CA$ oldalának belső pontja $Y$, $AB$ oldalának belső pontja $Z$. Hány darab egyenlő szárú háromszög lehet az $AYZ$, $BXZ$, $CXY$, $XYZ$ háromszögek között? Az összes lehetőségre mutass példát.

Az $AYZ$, $BXZ$, $CXY$ háromszögeknek van $60^\circ$-os szöge, így ezek akkor és csak akkor egyenlő szárúak, ha szabályosak is.

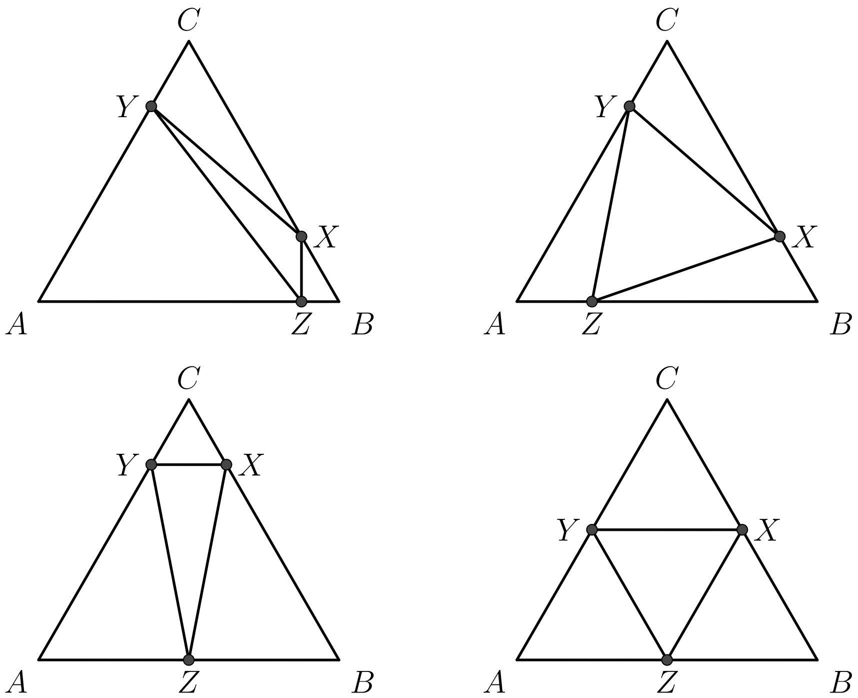
0 egyenlő szárú háromszöget kapunk, ha például $X$ a $B$-hez legközelebbi, $Y$ a $C$-hez legközelebbi negyedelőpont, $Z$ pedig a $B$-hez legközelebbi nyolcadolópont. Ellenőrizhető, hogy az

$XYZ$ háromszög oldalai páronként különböző hosszúságúak, és nem párhuzamosak $ABC$ oldalaival.

1 egyenlő szárú háromszöget kapunk, ha például $X$ a $B$-hez, $Y$ a $C$-hez, $Z$ az $A$-hoz legközelebbi negyedelőpont a megfelelő oldalon. Ekkor az $XYZ$ háromszög a szimmetria miatt szabályos, így egyenlő szárú, míg a másik három nem lehet szabályos, tehát egyenlő szárú sem.

2 egyenlő szárú háromszöget kapunk, ha például $X$ és $Y$ a $C$-hez legközelebbi negyedelőpont a megfelelő oldalon, $Z$ pedig az $AB$ felezőpontja. A szimmetria miatt $XYZ$ és $CXY$ egyenlő szárúak, a másik két háromszög viszont nem lehet szabályos, tehát egyenlő szárú sem.

4 egyenlő szárú háromszöget kapunk, ha $X$, $Y$ és $Z$ rendre a megfelelő oldalak felezőpontjai, ekkor mind a 4 háromszög szabályos is.




Pontosan 3 egyenlő szárú háromszöget nem kaphatunk. Ha létezne a pontoknak ilyen megválasztása, akkor az $AYZ$, $BXZ$, $CXY$ háromszögek között lenne legalább két egyenlő szárú, amelyek így szabályosak is lennének. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ezek $BXZ$ és $CXY$. Ekkor az $AZXY$ négyszög paralelogramma, amelyet az $YZ$ átlója oszt fel az $AYZ$ és $XYZ$ háromszögekre. Ezek tehát egymás középpontos tükörképei, így vagy mindkettő egyenlő szárú, vagy egyik sem. Tehát 2 vagy 4 egyenlő szárú háromszögünk van, ami ellentmondás.

3. Két játékos, $A$ (aki a játékot kezdi) és $B$ a következő játékot játsszák: felváltva törölnek egy-egy számjegyet a 876543210 számból, amíg csak egyetlen jegy marad. Ha a nyolc törlés bármelyike után a számjegyeket összeolvasva a szám osztható néggyel, $B$ nyeri a játékot, egyébként pedig $A$. Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája? Ha van, adj is meg egy nyerő stratégiát.
(Ha a játék végén 0 marad, akkor $B$ nyert, hiszen 0 osztható 4-gyel.)

*Első megoldás.* Megmutatjuk, hogy $B$-nek van nyerő stratégiája.

Ha $A$ az első lépésben 2-nél nagyobb számot töröl, akkor $B$ az 1-es törlésével eléri, hogy a szám 20-ra végződjön. Ha $A$ az első lépésben 2-nél kisebbet töröl, akkor $B$ a másik 2-nél kisebb jegy törlésével eléri, hogy a szám 32-re végződjön. Mindkét esetben $B$ nyert.

Marad az az eset, hogy $A$ elsőre a 2-est törli. Ekkor törölje $B$ az 1-est, a megmaradó szám így 8765430.

Ha $A$ most a 3-ast törli, $B$ azonnal nyer. Ha 4-nél nagyobb számot töröl, akkor $B$ a 3-as törlésével eléri, hogy a szám 40-re végződjön, ekkor is $B$ nyer.

Tehát $A$ csak a 4-est vagy 0-t törölheti. Törölje ekkor $B$ a 3-ast, így a megmaradó szám $\overline{8765N}$, ahol $N = 0$ vagy $N = 4$.

Ha $A$ 6-nál nagyobb számot töröl, akkor $B$ az 5-ös törlésével eléri, hogy a végződés $\overline{6N}$ legyen, ami 4-gyel osztható. Ha $A$ az 5-öst törli, a végződés $\overline{6N}$, ekkor is $B$ nyer. Ha $A$ a 4-est törli, akkor $B$ az 5-ös törlésével eléri, hogy 76 legyen a végződés, ekkor is ő nyer.

Marad az az eset, hogy $A$ a 6-ost törli, ekkor törölje $B$ az 5-öst, megmarad $\overline{87N}$.

Ekkor bármit is lép $A$, az utolsó lépésben $B$ meg tudja hagyni 8 és $N$ közül valamelyiket, és mivel ez mindenképpen 4-gyel osztható szám, megnyeri a játékot.

*Második megoldás.* $B$ számára egy lehetséges nyerő stratégia a következő: törölje sorra az 1, 3, 5, 7 számjegyeket. Ha ezek közül valamelyik már korábban törlődött, akkor helyette $B$ tetszőleges másik jegyet törölhet. Megmutatjuk, hogy ilyen lépésekkel a játék során valamikor biztosan 4-gyel osztható számot kapunk.

Ha $A$ az első lépésben 2-nél nagyobb számot vagy 0-át törölt, akkor az 1-es törlése után a kapott szám 20-ra vagy 32-re végződik, tehát 4-gyel osztható. Ha $A$ az 1-est törli, azonnal 4-gyel osztható számot kapunk. Marad az az eset, hogy $A$ elsőként a 2-es jegyet törölte.

Három lépéspár után a megmaradó 3 jegy ekkor csak a 8, 7, 6, 4, 0 számok közül kerülhet ki. Ha a 7 és a 6 is megmaradt, akkor $B$ nyert, hiszen a 876, 764, 760 számok mindegyike osztható 4-gyel. Ha a 7 már törlődött, akkor a szám végződése 64, 60 vagy 40, ekkor is 4-gyel osztható számot kaptunk. Ha a 7-es megmaradt, de a 6-os nem, akkor az utolsó lépéspár után csak a 8, 4, 0 számok valamelyike maradhat meg, ezek viszont 4-gyel oszthatók. Így $B$ minden esetben megnyerte a játékot.

4. Egy 7 fős rablóbanda rabolt egy zsák aranyat. Szétrakták az asztalon, majd így osztoztak: először egyikük megszámolta az aranyakat, majd elvett annyit, amennyi e szám a számjegyeinek összege. Ezután a jobb oldali szomszédja a maradékot számolta meg, s elvett annyi aranyat, amennyi e szám jegyeinek összege, s így folytatták tovább. Azt tapasztalták, hogy épp akkor fogyott el, mikor mindenki ugyanannyiszor vett már, sőt, mindenkinek ugyanannyi arany jutott a vezért kivéve. Őhozzá több arany került. Tudjuk még, hogy 200-nál nem fér több arany egy zsákba. Hány arany lehetett kezdetben, és hányadikként vett a rablóvezér?

Egy szám 9-es maradéka megegyezik számjegyei összegének 9-es maradékával. Ez azt jelenti, hogy az első kivétel után 9-cel osztható lesz a zsákban lévő aranyak száma, és ez a tulajdonság a későbbiekben is megmarad. A 200-nál nem nagyobb 9-cel osztható számok között az alábbi átmenetek lehetségesek, ha a számjegyek összegével csökkentünk:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\mathbf{198} & \rightarrow & 180 & \rightarrow & 171 & \rightarrow & 162 & \rightarrow & 153 & \rightarrow & 144 & \rightarrow & 135 & \rightarrow & \mathbf{126} & \rightarrow & 117 \\
 & & & & \uparrow & & & & & & & & & & & & \downarrow \\
 & & & & 189 & & & & & & & & & & & & 108 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \downarrow \\
18 & \leftarrow & 27 & \leftarrow & 36 & \leftarrow & 45 & \leftarrow & \mathbf{54} & \leftarrow & 63 & \leftarrow & 72 & \leftarrow & 81 & \leftarrow & 99 \\
\downarrow & & & & & & & & & & & & & & \uparrow & & \\
9 & \rightarrow & 0 & & & & & & & & & & & & 90 & &
\end{array}$$

Mivel mind a 7 rabló ugyanannyiszor vett, ezért a kivételek száma 7-tel osztható, azaz az 1. kivétel után kapott szám csak olyan (9-cel osztható) szám lehet, ahonnan 7-tel osztva 6 maradékot adó számú lépésben jutunk el a 0-hoz. A fenti ábráról leolvasható, hogy a 198, 126, 54 értékek jöhetnek szóba. 198 arany csak úgy maradhat 1 lépés után, ha 200 aranyról indulunk. Ekkor az első rabló $2+9+9=20$ aranyat, a második rabló $18+9+9=36$ aranyat, a harmadik rabló $9+9+9=27$ aranyat kapna. Így nem teljesülne, hogy a vezért kivéve mindenki ugyanannyit kap, ez az eset tehát nem ad megoldást.

Ha az első lépés után 126 arany maradt, akkor a továbbiakban mindig 9 aranyat vesznek ki, kivéve az 5. rablót, aki az első kivételénél 18 aranyat kap. Ekkor tehát a 2., 3., 4., 6. és 7. rabló 18 aranyat kap összesen, az 5. rabló 27-et. Csak akkor teljesülnek a feltételek, ha az 1. rabló is 18 aranyat kap összesen, azaz kezdetben **135 arany** volt, és a vezér **5.** volt a sorban.

Ha az első lépés után 54 arany maradt, akkor innentől mindenki csak egyszer vesz el 9 aranyat. A vezér tehát csak az **1.** rabló lehet, és mivel neki többet kell vennie, az aranyak száma kezdetben **64, 65, 66, 67, 68 vagy 69** lehet. Más megoldás nem lehetséges.

1. Lehet-e találni két egymást követő kettőhatványt, melyek összege négyzetszám? (Kettőhatványnak nevezzük az $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ sorozat tagjait, ahol minden tag az őt megelőző kétszerese.)

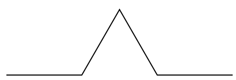
Vegyük észre, hogy $2^n + 2^{n+1} = 2^n \cdot (1+2) = 2^n \cdot 3$. A számelmélet alaptétele miatt ez a szám osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel. A 3-mal osztható négyzetszámok azonban 9-cel is oszthatók, mert az alapjuknak is oszhatónak kell lennie 3-mal. Tehát a feladat kérdésére a válasz: nem lehet találni.

2. Egy sokszög minden oldalának hossza centiméterben mérve egész szám, az összes belső szögének nagysága pedig $60°$ vagy $240°$. Lehet-e a sokszög oldalainak száma

a) 2016?

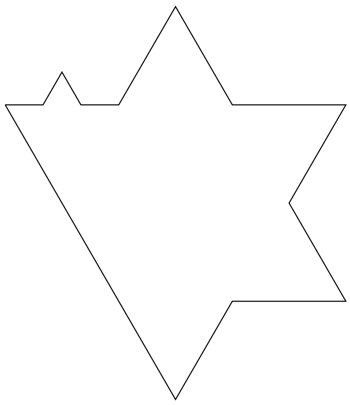
b) 2017?

a) Igen. Induljunk ki egy szabályos háromszögből. Ennek egyik oldalát helyettesítsük az alábbi töröttvonallal (úgy, hogy a töröttvonal tüske alakú része kifelé álljon):



Ennek a töröttvonalnak minden szakasza harmada az eredeti háromszög oldalának, és összesen hárommal növelte sokszögünk oldalszámát (egy oldalból lett négy), és a három újonnan keletkező szög rendre $240°$, $60°$ és $240°$. A lépést megfelelően sokszor ismételve tetszőleges hárommal osztható oldalszámot megkaphatunk, és ha a a kapott sokszögben a legrövidebb oldal hosszát egésznek választjuk, akkor minden oldala egész hosszúságú lesz. Mivel 2016 osztható 3-mal, a fent leírt módszerrel tudunk megfelelő 2016 oldalú sokszöget konstruálni.

Példa egy 12 oldalú sokszögre (háromféle oldalhosszúsággal):



Nem. Legyen $a$ darab $60°$-os és $b$ darab $240°$-os szöge a sokszögnek. Ekkor $a+b = 2017$ és $a \cdot 60° + b \cdot 240° = 2015 \cdot 180°$, felhasználva, hogy egy $n$-csúcsú sokszög belső szögeinek összege $(n-2) \cdot 180°$. 60-nal osztva: $a + 4b = 2015 \cdot 3$, ahonnan $a + b = 2017$-et felhasználva $2017 + 3b = 3 \cdot 2015$. Ez viszont nem lehetséges, mert az egyenlőség bal oldala nem osztható 3-mal, a jobb oldal viszont igen.

3. **Ki lehet-e színezni a sík pontjait négy színnel úgy, hogy ne lehessen találni négy darab egyszínű pontot, melyek egy téglalap négy csúcsát alkotják?**

Bárhogy is színezzük ki a sík pontjait, lesz egyszínű téglalap.

Tekintsünk a síkon egy $4 \times 1024$-es rácstéglalapot. Ebben a téglalapban minden vízszintes rácsegyenesen 5 rácspont van, így egy ilyen szakaszt $4^5 = 1024$ féle módon lehet kiszínezni. Mivel a téglalapunk 1025 darab ilyen 5 rácspontot tartalmazó vízszintes szakaszt tartalmaz, ezért a skatulyaelv alapján lesz kettő vízszintes szakasz, melyek azonos módon lesznek színezve. Mostantól csak ezt a két egyformán színezett szakaszt tekintjük. Mivel 5 pontból állnak, lesz rajtuk 2-2 egyformán színezett pont, és ezek ugyanabban a pozícióban is választhatók, hiszen egyformán van színezve a két szakasz. Az így kapott négy pont egy téglalapot alkot.

4. **Egy 0-tól és 1-től különböző racionális számból kiindulva egy lépésben végrehajthatjuk a következő két művelet valamelyikét: vehetjük egy meglévő szám reciprokát, vagy egy meglévő számot kivonhatunk egyből. Ezeket a lépéseket addig ismételjük, amíg már nem jöhet ki új szám. A kiinduló szám értékétől függően hányféle számot kaphatunk ilyen módon? Az összes lehetőségre mutass példát!**

A megoldás elején megjegyezzük, hogy semelyik lépés során nem kapunk 0-t vagy 1-et, mert 0-t csak 1-ből, 1-et pedig 0-ból vagy 1-ből kaphatunk csak.

A megadott lépéseket kétszer megismételve az eredeti számot kapjuk vissza: $1-(1-x) = x$ és $1/(1/x) = x$ (ha $x \neq 0$). Ez azt jelenti, hogy a kétféle lépést csak felváltva érdemes végrehajtani. Az $a$ számból az $1-x$ lépéssel indulva hat lépés után visszajutunk $a$-hoz:

$$\begin{tikzcd}
 & 1-a \arrow[r] & \frac{1}{1-a} \arrow[dr] & \\
a \arrow[ur] & & & \frac{a}{a-1} \arrow[dl] \\
 & \frac{1}{a} \arrow[ul] & 1-\frac{1}{a} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

Vegyük észre, hogy ha az $1-x$ helyett az $1/x$ lépésel indítunk, ugyanezt a hatszöget kapjuk, csak az óramutató járásával ellentétes körüljárással.

Lássuk, mi történik, ha a 6 szám között vannak egyenlők. Mivel a kört bármelyik pontjából indíthatnánk, feltehetjük, hogy $a$ egyenlő valamelyik másik számmal.

- Ha $a = \frac{1}{a}$, akkor $a = -1$ (mert az $a = 1$ esetet kizártuk).
- Ha $a = 1-a$, akkor $a = \frac{1}{2}$.
- Az $a = \frac{1}{1-a}$ egyenletnek nincs megoldása: átrendezve $a(1-a) = 1$, tehát mindkét tényező pozitív, és ekkor mindkettő 0 és 1 között van, vagy mindkét tényező negatív, ami lehetetlen, mert az összegük 1.
- Az $a = 1 - \frac{1}{a}$ egyenletnek nincs megoldása: átrendezve $a + 1/a = 1$, de ha $a$ pozitív, akkor $a$ vagy $1/a$ legalább 1, ha $a$ negatív, akkor $a + 1/a$ is negatív.
- Ha $a = \frac{a}{a-1}$, akkor $a = 2$ (mert az $a = 0$ esetet kizártuk).

Azt figyelhetjük meg, hogy az egybeeső értékek esetei egyetlen ,,körben" helyezkednek el:

$$\begin{tikzcd} & -1 \arrow[r] & -1 \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] & & & 2 \arrow[dl] \\ & \frac{1}{2} \arrow[ul] & \frac{1}{2} \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

Itt tehát 3 különböző számot kapunk (a kiinduló számot is beleértve).

Minden más esetben a hat formula különböző értéket ad (és értelmezve van a kikötések miatt). Például:

$$\begin{tikzcd} & -2 \arrow[r] & -\frac{1}{2} \arrow[dr] & \\ 3 \arrow[ur] & & & \frac{3}{2} \arrow[dl] \\ & \frac{1}{3} \arrow[ul] & \frac{2}{3} \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

Tehát a kiinduló számtól függően három vagy hat különböző értéket kaphatunk, beleszámolva a kiinduló értéket is.

5. 16 csapat körmérkőzést játszik, mindenki mindenkivel pontosan egyszer találkozik. Minden mérkőzésen az egyik csapat nyer, a másik veszít, döntetlen nincsen.
Legfeljebb hány csapatnak lehet legalább 12 győzelme?

Legyen $x$ darab ilyen csapat. Mivel ők egymás között $x(x-1)/2$ meccset játszottak, a többivel pedig $x(16-x)$ meccset, így összesen legfeljebb $x(x-1)/2 + x(16-x)$ győzelmet szerezhettek. Mivel mindegyikük legalább 12 győzelmet aratott, így

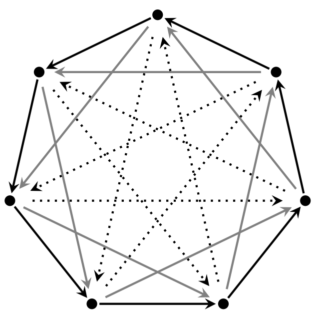
$$12x \leq x(x-1)/2 + x(16-x).$$

Átrendezve

$$0 \leq x\left(\frac{7}{2} - \frac{x}{2}\right),$$

ahonnan $x \leq 7$ jön ki.

$x = 7$-re megadható jó konstrukció: a 7 ,,kijelölt" csapat mindegyike verje meg a maradék 9 csapat mindegyikét, egymás között pedig három darab hét hosszú körbeveréssel mindenkinek lesz még 3 győzelme (lásd az ábrát, a nyíl a legyőzőtől mutat a legyőzöttre).



1. Egy pozitív prímszámokból álló, növekedő sorozatban az egymást követő tagok különbsége 12. Melyik a leghosszabb ilyen sorozat?

*Első megoldás.* Mivel 12-vel növelünk, ezért minden lépésben 2-vel növekszik az egyesek helyén álló számjegy. Ha páros számmal kezdődik a sorozat, akkor csak egy elemű lehet, mert a 2 az egyetlen páros prím. Az utolsó számjegyek tehát az $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ halmazból kerülnek ki. Ráadásul valahonnan kezdve, ebben a sorrendben fogják egymást ciklikusan követni.

Ha egy sorozat legalább 5 elemből áll, akkor szerepel benne az 5, mint utolsó számjegy. Ekkor a szám maga is csak 5 lehet, mert az az egyetlen 5-re végződő prím. Az 5 viszont csak az első elem lehet, hiszen a pozitívak a sorozat elemei és 12-vel növekszik. A leghosszabb sorozat tehát: $5, 17, 29, 41, 53$.

*Második megoldás.* Tegyük fel, hogy a sorozat legalább 5 tagból áll. Vegyük észre, hogy a $p$, $p+12$, $p+24$, $p+36$ és $p+48$ számok mind különböző maradékot adnak 5-tel osztva, mert a lehetséges különbségeik 12, 24, 36 vagy 48 nem oszthatók 5-tel. Mivel 5-ös maradékból 5-féle van, az egyikük osztható 5-tel. Ez csak $p = 5$ lehet, mert pozitív prímekről van szó.

Tehát a legalább 5 tagból álló sorozatnak így kell kezdődnie: $5, 17, 29, 41, 53$, ami mind prím, tehát 5 tagja lehet a sorozatnak. 6 tagja viszont nem lehet, mert a következő szám, a 65 nem prímszám.

2. Két játékos, $A$ (aki a játékot kezdi) és $B$ a következő játékot játsszák: felváltva törölnek egy-egy számjegyet a 876543210 számból, amíg csak egyetlen jegy marad.
Ha a nyolc törlés bármelyike után a számjegyeket összeolvasva a szám osztható néggyel, $B$ nyeri a játékot, egyébként pedig $A$. Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája? Ha van, adj is meg egy nyerő stratégiát.
(Ha a játék végén 0 marad, akkor $B$ nyert, hiszen 0 osztható 4-gyel.)

*Első megoldás.* Megmutatjuk, hogy $B$-nek van nyerő stratégiája.

Ha $A$ az első lépésben 2-nél nagyobb számot töröl, akkor $B$ az 1-es törlésével eléri, hogy a szám 20-ra végződjön. Ha $A$ az első lépésben 2-nél kisebbet töröl, akkor $B$ a másik 2-nél kisebb jegy törlésével eléri, hogy a szám 32-re végződjön. Mindkét esetben $B$ nyert.

Marad az az eset, hogy $A$ elsőre a 2-est törli. Ekkor törölje $B$ az 1-est, a megmaradó szám így 8765430.

Ha $A$ most a 3-ast törli, $B$ azonnal nyer. Ha 4-nél nagyobb számot töröl, akkor $B$ a 3-as törlésével eléri, hogy a szám 40-re végződjön, ekkor is $B$ nyer.

Tehát $A$ csak a 4-est vagy 0-t törölheti. Törölje ekkor $B$ a 3-ast, így a megmaradó szám $\overline{8765N}$, ahol $N = 0$ vagy $N = 4$.

Ha $A$ 6-nál nagyobb számot töröl, akkor $B$ az 5-ös törlésével eléri, hogy a végződés $\overline{6N}$ legyen, ami 4-gyel osztható. Ha $A$ az 5-öst törli, a végződés $\overline{6N}$, ekkor is $B$ nyer. Ha $A$ a 4-est törli, akkor $B$ az 5-ös törlésével eléri, hogy 76 legyen a végződés, ekkor is ő nyer.

Marad az az eset, hogy $A$ a 6-ost törli, ekkor törölje $B$ az 5-öst, megmarad $\overline{87N}$.

Ekkor bármit is lép $A$, az utolsó lépésben $B$ meg tudja hagyni 8 és $N$ közül valamelyiket, és mivel ez mindenképpen 4-gyel osztható szám, megnyeri a játékot.

*Második megoldás.* $B$ számára egy lehetséges nyerő stratégia a következő: törölje sorra az 1, 3, 5, 7 számjegyeket. Ha ezek közül valamelyik már korábban törlődött, akkor helyette $B$ tetszőleges másik jegyet törölhet. Megmutatjuk, hogy ilyen lépésekkel a játék során valamikor biztosan 4-gyel osztható számot kapunk.

Ha $A$ az első lépésben 2-nél nagyobb számot vagy 0-át törölt, akkor az 1-es törlése után a kapott szám 20-ra vagy 32-re végződik, tehát 4-gyel osztható. Ha $A$ az 1-est törli, azonnal 4-gyel osztható számot kapunk. Marad az az eset, hogy $A$ elsőként a 2-es jegyet törölte.

Három lépéspár után a megmaradó 3 jegy ekkor csak a 8, 7, 6, 4, 0 számok közül kerülhet ki. Ha a 7 és a 6 is megmaradt, akkor $B$ nyert, hiszen a 876, 764, 760 számok mindegyike osztható 4-gyel. Ha a 7 már törlődött, akkor a szám végződése 64, 60 vagy 40, ekkor is 4-gyel osztható számot kaptunk. Ha a 7-es megmaradt, de a 6-os nem, akkor az utolsó lépéspár után csak a 8, 4, 0 számok valamelyike maradhat meg, ezek viszont 4-gyel oszthatók. Így $B$ minden esetben megnyerte a játékot.

3. Egy $5 \times 5$-ös táblázat mezőibe beírtuk a pozitív egész számokat 1-től $n$-ig (mindegyiket egyszer), a kimaradó mezőkbe pedig nullákat írtunk. A kitöltést *érdekesnek* nevezünk, ha minden sorban és minden oszlopban egyenlő a beírt számok összege. Melyik a legkisebb pozitív egész $n$, melyre található *érdekes* kitöltés?

A beírt számok összege $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ osztható 5-tel, ez csak úgy lehet, ha $n$ vagy $n + 1$ 5-tel osztható. Ezek alapján a lehetséges $n$ értékek és a hozzájuk tartozó $S$ sorösszegek:

| $n$ | $S$ |
|---|---|
| 4 | 2 |
| 5 | 3 |
| 9 | 9 |
| 10 | 11 |
| 14 | 21 |
| 15 | 24 |
| 19 | 38 |
| 20 | 42 |
| 24 | 60 |
| 25 | 65 |

Az $n = 4$ és $n = 5$ eset nyilván nem lehetséges, mert van nagyobb beírt szám, mint a sorösszeg.

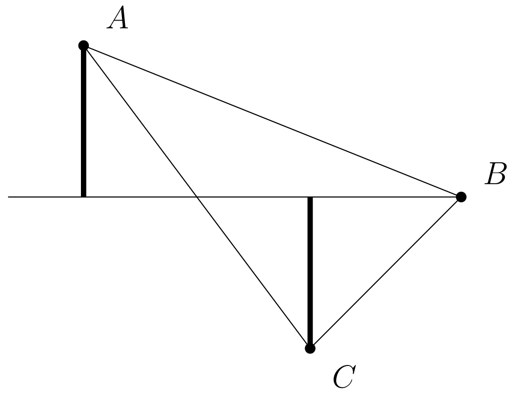
Az $n = 9$ és $n = 10$ szintén nem jó, mert az első esetben a 8-as sorába vagy oszlopába nem jut jó pár a 8 mellé, a második esetben pedig a 10-es sorába vagy oszlopába nem jut jó pár a 10 mellé.

Az $n = 14$ eset megvalósítható:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 13 | | |
| 6 | 1 | | | 14 |
| | 4 | 8 | 9 | |
| | 2 | | 12 | 7 |
| 10 | 11 | | | |

4. Melyek azok az $ABCD$ négyszögek, melyek belsejében található olyan $P$ pont, hogy a $PA$, $PB$, $PC$, $PD$ szakaszok a négyszög belsejében haladnak, és az $ABP$, $BCP$, $CDP$ és $DAP$ háromszögek területe mind egyforma? Igyekezz minél egyszerűbb jellemzést adni!

Mivel $T_{ABP} = T_{BCP}$, ezért $A$ és $C$ egyenlő távolságra vannak a $BP$ egyenestől (ez a távolság az $ABP$ és $BCP$ háromszögek $BP$-hez tartozó magassága). Ez kétféle módon lehetséges: $AC$ párhuzamos $BP$-vel, vagy $BP$ átmegy az $AC$ szakasz felezőpontján. Mivel az első lehetőség nem áll fenn, így a $BP$ egyenes átmegy az $AC$ átló felezőpontján.




Hasonló logikával a $DP$ egyenes is átmegy az $AC$ szakasz felezőpontján. Ez kétféleképpen lehetséges:

a) $P$ az $AC$ szakasz felezőpontja.

b) $BP$ és $DP$ egy egyenesre esik: a $P$ pontot és az $AC$ felezőpontját összekötő egyenesre.

Az (a) esetben $AC$ belső átló kell hogy legyen. A $T_{PAB} = T_{DAP}$ feltételt is felhasználva következik, hogy az $AC$ belső átló felezi a négyszög területét, és $P$ ennek az átlónak a felezőpontja. Megfordítva: ha egy négyszög egyik átlója felezi a területét, akkor ennek az átlónak a felezőpontja jó $P$-nek, hiszen a súlyvonal felezi a háromszög területét.

A (b) esetben a $BD$ átlóról derült ki, hogy felezi a négyszög területét, és $P$ ezen átló felezőpontja kell, hogy legyen.

Tehát azok a jó négyszögek, amelyek egyik átlója felezi a négyszög területét. Egy ezzel egyenértékű leírás: a négyszög egyik átlója átmegy a másik átló felezőpontján.