TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

54. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Vármegyei forduló – 2025. március 21.

HATODIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Hangának volt sok kis papírlapja. Mindegyikre rajzolt vagy egy háromszöget, vagy egy négyzetet. Az így lerajzolt sokszögeknek összesen 333 csúcsa és 66 átlója van.
Hány papírlapra rajzolt Hanga háromszöget?

Megoldás. A háromszögeknek nincs átlója.
Minden négyzetnek pontosan két átlója van, így Hanga $66/2 = 33$ négyzetet rajzolt.
A 33 négyzetnek összesen $33 \cdot 4 = 132$ csúcsa van.
Mivel összesen 333 csúcsa van a sokszögeknek, ezért $333 - 132 = 201$ olyan csúcs van, ami háromszöghöz tartozik.
Egy háromszögnek pontosan 3 csúcsa van, így $201/3 = 67$ háromszöget rajzolt Hanga.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

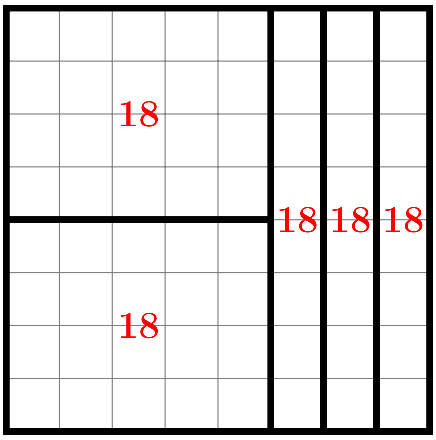
2. Vágj szét egy 8×8-as sakktáblát a rácsvonalak (a sakktábla mezőit határoló szakaszok) mentén

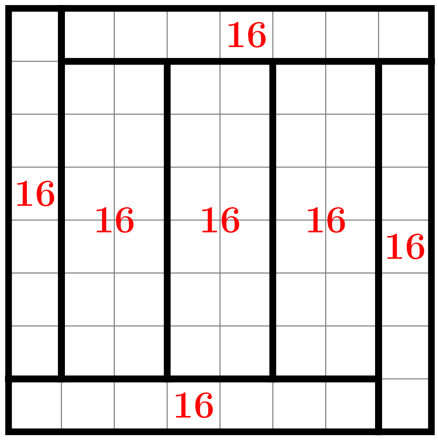
(a) 5;

(b) 7

egyenlő kerületű téglalapra. Add meg a téglalapok kerületét.

Megoldás. Az alábbi ábrán egy-egy lehetséges megoldás látható a két részfeladatra.





A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap · Nemzeti Tehetség Program · Kulturális és Innovációs Minisztérium · Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

3. Benedek sütött 15 citromos, 15 diós és 15 epres sütit, melyeket hétfőtől péntekig fogyasztott el a következő szabályok szerint:

- Az azonos fajta sütikből különböző napokon, különböző darabszámút evett meg.
- Minden nap minden sütiből legalább egyet megevett.
- Minden nap ugyanannyi sütit fogyasztott el összesen.
- Kedden ugyanannyi citromos sütit evett meg, mint epreset, csütörtökön pedig ugyanannyi citromos sütit, mint diósat.
- Hétfőn 3 diós sütit evett, szerdán pedig eggyel több citromosat, mint diósat.

Melyik nap, milyen sütiből, hány darabot evett meg Benedek?
Másold le az alábbi táblázatot a lapodra, és abba írd bele a sütik darabszámát.

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek
Citromos					
Diós					
Epres					

A teljes pontszám eléréséhez elegendő egy helyesen kitöltött táblázat megadása. Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik egy helyes kitöltés megtalálását.

Megoldás. Összesen $3 \cdot 15 = 45$ süteményt sütött Benedek, és ezeket 5 nap alatt eszi meg úgy, hogy minden nap ugyanannyi sütit eszik. Vagyis $45/5 = 9$ sütit eszik minden nap. Mivel egyfajta sütiből 15 -öt evett, és minden nap különböző pozitív egész darabszámút, ezért ez csak úgy lehet, ha az egyes napokon 1, 2, 3, 4 és 5 darab sütit evett. Vagyis a táblázat minden sorában az 1, 2, 3, 4, 5 számok mindegyikének pontosan egyszer kell szerepelnie.
Kezdjük el kitölteni a táblázatot az adott napon elfogyasztott sütik darabszámával. Először írjuk be azt, amit közvetlenül a feladat szövegéből tudunk.
Tudjuk, hogy hétfőn 3 diós sütit evett.
Illetve kedden ugyanannyi citromos sütit evett, mint epreset (K), csütörtökön pedig ugyanannyi citromos sütit, mint diósat (L).
Szerdán pedig eggyel több citromosat (S+1), mint diósat (S).

	H	K	Sz	Cs	P
C		K	$S+1$	L	
D	3		S	L	
E		K			

Mivel minden nap összesen 9 sütit eszik meg Benedek, így a keddi diós és a csütörtöki epres sütik száma is páratlan. Ráadásul egyik sem lehet 3. Az előbbi azért, mert minden sorban minden szám csak egyszer szerepel, és a 3 már szerepel hétfőn, a második pedig azért, mert ha az 3 lenne, akkor L is 3 lenne, és a második sorban már hétfőn szerepel a 3. Vagyis mindkét szám 1 vagy 5.

	H	K	Sz	Cs	P
C		K	$S+1$	L	
D	3	1 | 5	S	L	
E		K		1 | 5	

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

A keddi diósak száma azonban nem lehet 1, mert ha 1 lenne, akkor $K = 4$ lenne. Tekintsük a szerdai napot, és látható, hogy az epres sütik száma páros, hiszen a citromos és a diós összesen páratlan. Ha $K = 4$, akkor a szerdai epresek száma 2 lenne, vagyis $2S + 1 + 2 = 9$, amiből következik, hogy $S = 3$, és így $S + 1 = 4$. Ez azonban lehetetlen, hiszen akkor kétszer szerepelne a 4 az első sorban.

	H	K	Sz	Cs	P
C		2	$S+1$	L	
D	3	5	S	L	
E		2	4	1 | 5	

Vagyis a keddi diósak száma 5, így $K = 2$. A szerdai epresek száma pedig 4.

Ha a szerdai epresek száma 4, akkor $S = 2$, hiszen tudjuk, hogy $2S+1+4 = 9$. Ebből viszont következik, hogy L nem lehet 2, vagyis a csütörtöki epresek száma nem lehet 5. A csütörtöki epresek száma tehát 1, így $L = 4$.

	H	K	Sz	Cs	P
C		2	3	4	
D	3	5	2	4	
E		2	4	1	

Vagyis a pénteki diósak száma 1, hiszen minden számnak pontosan egyszer kell szerepelnie egy sorban.

Viszont így a pénteki citromosak száma nem lehet 1, mert akkor aznap még 7 epreset kellene ennie. Tehát hétfőn evett 1, pénteken pedig 5 citromosat. Ebből következik, hogy pénteken 3 epreset evett, hétfőn pedig 5-öt.

	H	K	Sz	Cs	P
C	1	2	3	4	5
D	3	5	2	4	1
E	5	2	4	1	3

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

4. Egy nagy táblára az első 100 pozitív egész szám van felírva. Béla minden lépésben letöröl 3 számot és felírja vagy a három szám összegét, vagy a három szám szorzatát. Néhány ilyen lépés után csak páratlan számok maradtak a táblán. Ráadásul sikerült ezt a helyzetet úgy elérnie, hogy ennél több páratlan szám nem maradhatott volna. Hány szám szerepelt ekkor a táblán?

Megoldás. A táblán kezdetben 50 darab páros és 50 darab páratlan szám szerepel. Béla minden lépésben 2-vel csökkenti a táblára írt számok darabszámát, hiszen három számot helyettesít eggyel.
Ha Béla egy páratlan számot ír a táblára, biztosak lehetünk benne, hogy legalább egy páratlan számot letörölt ehhez, hiszen három páros szám összege és szorzata is páros. Emiatt a páratlan számok darabszáma nem tud növekedni, mindig legfeljebb 50 db lehet a táblán.
Béla el tudja érni, hogy pontosan 50 db páratlan szám legyen a táblán, és semmi más.
Ennek egy módja például, ha elkezdi eltüntetni szép sorban a páros számokat, úgy, hogy amíg van legalább három belőlük, addig megfog hármat, és összeadja/összeszorozza őket. Így minden körben 2-vel csökkenti a páros számok számát. Így eljut odáig, hogy pontosan 2 darab páros szám van a táblán.
Ekkor ezt a kettőt, és még egy páratlan számot letörli, és felírja az összegüket, ami egy páratlan szám. Ekkor pontosan 50 db páratlan szám fog a táblán szerepelni, semmi más.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap · Nemzeti Tehetség Program · Kulturális és Innovációs Minisztérium · Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

5. Micimackó nagyon szeret tortát sütni, de csak kétfélét tud. Az egyikhez szüksége van 7 tojásra és 6 csomag vaníliás cukorra, a másikhoz szintén 7 tojásra, de csak 3 csomag vaníliás cukorra. Jelenleg mindössze 2 tojás és 5 csomag vaníliás cukor van a kamrájában, semmi egyéb. Fülestől tud vásárolni alapanyagot, aki mindkettőt dobozos kiszerelésben árulja. Fülesnél egy dobozban 8 tojás van, a vaníliás cukrot pedig 10 csomagos kiszerelésben tudja Micimackó megvenni.
Legkevesebb hány tortát kell sütnie Micimackónak ahhoz, hogy az összes tojás és vaníliás cukor elfogyjon a kamrájából?
(Micimackó ezeket az alapanyagokat csak ehhez a kétféle tortához tudja felhasználni, és a Fülestől vett alapanyagokat is a kamrájában tárolja.)

Megoldás. Nézzük meg, hogy hogyan tudja Micimackó elfogyasztani a tojásokat. Mivel mindkét tortához 7 tojásra van szükség, ezért ha Micimackónak 7-nél kevesebb tojása van, akkor kell venni egy csomag tojást, hogy tudjon sütni. Egy ilyen vásárlás-sütés pár után mindig 1-gyel több tojása lesz, vagyis 5 ilyen után összegyűlik 7 tojás egy újabb tortára, így akkor el tudja használni az összes tojást. Ezután ha kell még tortát sütnie, akkor megint egyesével fognak gyűlni a tojások, egészen addig, amíg el nem éri a 7-et, mivel akkor újra el tudja használni az összeset. Vagyis először 6 torta után fogynak el a tojások, majd utána 8 tortánként fogy el az összes tojás.
Nézzük meg, hogy 6 torta után el tud-e fogyni az összes vaníliás cukor. Mivel minden tortához 3 vagy 6 cukor fogy el, így a felhasznált vaníliás cukrok száma mindig hárommal osztható lesz, és 6 torta után, legalább 18 és legfeljebb 36 cukor fog elfogyni. Micimackó további csomagok vásárlásával 15, 25, 35, 45, … vaníliás cukrot tud szerezni (a már meglévővel együtt), de se a 25, se a 35 nem osztható 3-mal, így 6 tortához nem tudja az összes cukrot elhasználni.
14 tortához már fel tudja használni az összes alapanyagot: 12 doboz tojás és 4 cukor vásárlásával 98 tojása és 45 csomag cukra lesz, amit pontosan el fog használni, ha 1 darabot készít az első és 13-at a második tortából.

A feladatokat összeállította: Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Szepessy Luca.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.
A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Tehetség Program
Kulturális és Innovációs Minisztérium
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő