TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

54. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Vármegyei forduló – 2025. március 21.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Daninak van egy 30 és egy 50 centiméteres pálcája. Dani szeretné az egyik pálcát kettétörni úgy, hogy az így keletkező három pálcából egy olyan háromszöget lehessen kirakni, amelynek van két egyenlő hosszú oldala. Hol vannak azok a pontjai a pálcáknak, ahol megcsinálhatja így a kettétörést?

Megoldás. Ha Dani a 30 centis pálcát töri ketté, akkor azt középen kell megtennie, hogy keletkezzen két azonos hosszúságú pálca. Ekkor tehát a három pálca hossza: 15, 15 és 50 centiméter.
Ebből a három pálcából azonban nem lehet háromszöget összeállítani, hiszen a két 15 centiméteres pálcát akárhogyan helyezzük el úgy, hogy van közös végpontjuk, a két nem csatlakozó végpont távolsága legfeljebb 30 centiméter lehet.
Az 50 centiméteres pálcát eltörheti úgy, hogy két azonos hosszúságú szakasz keletkezzen. Ehhez az 50 centiméteres pálca felezőpontjában kell törnie. (Ekkor a keletkező pálcák hossza: 25, 25, 30, amelyekből össze lehet állítani háromszöget.)
Ha nem úgy töri el az 50 centiméteres pálcát, hogy a két keletkező pálca egyforma hosszú legyen, akkor az egyik keletkező és a 30 centiméteres pálcának kell egyforma hosszúnak lennie. Ehhez az 50 centiméteres pálcát egy 20 és egy 30 centiméteresre kell darabolnia.
A pálcának két ilyen pontja is van, hiszen mindkét végétől 20 centiméterre eltörve a pálcát kapunk 30 centiméteres pálcát.
Összesen tehát 3 megfelelő pont létezik.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

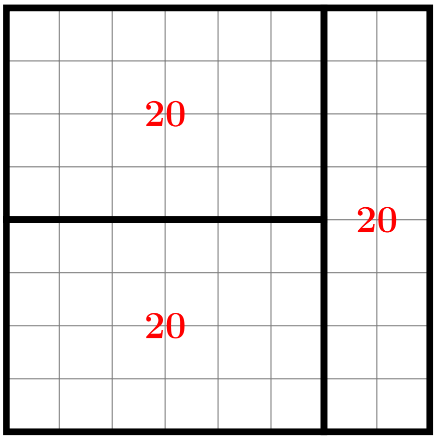
2. Vágj szét egy 8×8-as sakktáblát a rácsvonalak (a sakktábla mezőit határoló szakaszok) mentén

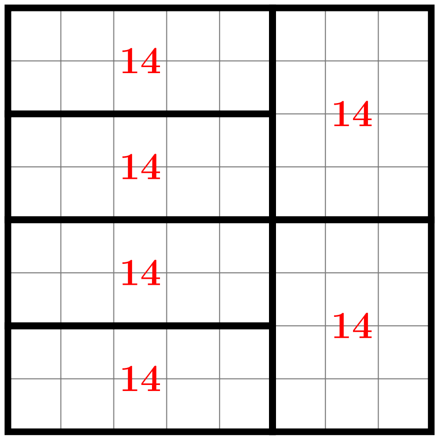
(a) 3;

(b) 6

egyenlő kerületű téglalapra. Add meg a téglalapok kerületét.

Megoldás. Az alábbi ábrán egy-egy lehetséges megoldás látható a két részfeladatra.





A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap · Nemzeti Tehetség Program · Kulturális és Innovációs Minisztérium · Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

3. Egy lovagi tornán lovak és sárkányok vesznek részt, mindkét állatfajból legalább egy. A lovaknak egy feje és négy lába, a sárkányoknak három feje és két lába van. Hányszor annyi sárkány van, mint ló, ha összesen ugyanannyi fejük van, mint lábuk?

Megoldás. Próbálkozással hamar kiderül, hogy ha éppen három sárkány és egy ló van a tornán, akkor teljesül a feladat feltétele, hiszen így $3 \cdot 3 + 1 = 10$ fejük lesz összesen és $3 \cdot 2 + 4 = 10$ lábuk.
Értelemszerűen, ha egyforma aránnyal növeljük a sárkányok és a lovak számát is, akkor is ugyanannyi fejük lesz, mint lábuk, tehát minden olyan eset megfelelő, ahol háromszor annyi sárkány van, mint ló.
Ha több, mint háromszor annyi sárkány lenne, mint ahány ló, akkor több fejük lenne összesen, mint lábuk, hiszen a megfelelő, hármszoros arányhoz képest még néhány sárkány több fejet ad hozzá a meglévőkhöz, mint ahány lábat.
Hasonlóan, ha a sárkányok száma kevesebb, mint a lovak számának háromszorosa, akkor a megfelelő helyzethez képest az elvett sárkányok többel csökkentik a fejek számát, mint a lábak számát, így az már nem lehet egyenlő.
Tehát csak az a helyzet állhat fenn, hogy háromszor annyi sárkány van, mint ló.
Megjegyzés: Természetesen próbálkozás helyett számolással is megkapható a megfelelő arány. Ha l darab ló és s darab sárkány van, akkor a feltétel szerint

$$3s + l = 2s + 4l,$$

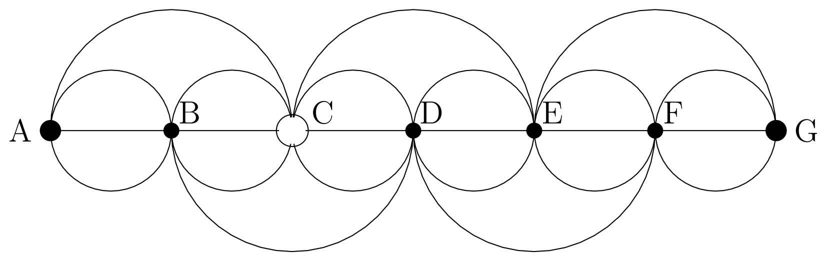
ami éppen azt jelenti, hogy $s = 3l$. Tehát a sárkányok száma háromszor annyi, mint a lovaké.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

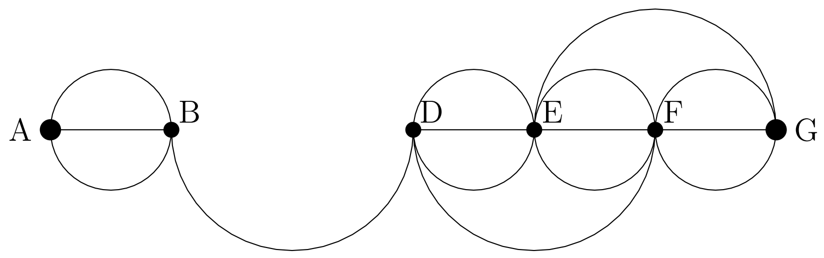
TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

4. Hányféleképpen lehet eljutni az alábbi ábrán A-ból G-be, ha csak a vonalak mentén lehet haladni, mindig balról jobbra kell haladni, és nem szabad érinteni C-t? (Az ábrán feltüntetett betűk az útkereszteződéseket jelölik.)



Megoldás. Ha C-t nem szabad az útnak érintenie, akkor nem lehet használni azokat az utakat, amik C-be érkeznek, vagy C-ből indulnak. Ha ezeket elhagyjuk az ábrából, akkor ezt kapjuk:



A-ból B-be 3-féleképpen tudunk eljutni. Innen D-be egyértelmű az út, ami azt jelenti, hogy A és D között is összesen 3-féle megfelelő út vezet.
E-be csak D-n keresztül juthatunk el, a D-be vezető 3 lehetséges útvonal mindegyikét 3-féleképpen folytathatjuk, tehát összesen 9 megfelelő útvonal van A és E között.
F-be E-ből és közvetlenül D-ből is érkezhetünk. E-ből három útvonal vezet F-be, ami ismét megháromszorozza az utak számát. Azaz E-n keresztül $3 \cdot 9 = 27$ út vezet F-be.
Mivel D-be 3 út vezetett, és onnan egy közvetlen útvonal vezet F-be, ezért ezeket még hozzá kell adnunk eddigiekhez. Így A-ból F-be összesen $27 + 3 = 30$ különböző útvonalon juthatunk el.
G-be F-ből és közvetlenül E-ből is érkezhetünk. F-ből három útvonal vezet G-be, ami ismét megháromszorozza az utak számát. Azaz F-en keresztül $3 \cdot 30 = 90$ út vezet G-be.
Mivel E-be 9 útvonalon juthattunk el, és onnan egy közvetlen útvonal vezet G-be, ezért ezeket még hozzá kell adnunk az eddigiekhez. Így A-ból G-be összesen $90+9 = 99$ különböző útvonalon juthatunk el.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

5. Benedek sütött 15 citromos, 15 diós és 15 epres sütit, melyeket hétfőtől péntekig fogyasztott el a következő szabályok szerint:

- Az azonos fajta sütikből különböző napokon, különböző darabszámút evett meg.
- Minden nap minden sütiből legalább egyet megevett.
- Minden nap ugyanannyi sütit fogyasztott el összesen.
- Kedden ugyanannyi citromos sütit evett meg, mint epreset, csütörtökön pedig ugyanannyi citromos sütit, mint diósat.
- Hétfőn 3 diós sütit evett, szerdán pedig eggyel több citromosat, mint diósat.

Melyik nap, milyen sütiből, hány darabot evett meg Benedek?
Másold le az alábbi táblázatot a lapodra, és abba írd bele a sütik darabszámát.

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek
Citromos					
Diós					
Epres					

A teljes pontszám eléréséhez elegendő egy helyesen kitöltött táblázat megadása. Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik egy helyes kitöltés megtalálását.

Megoldás. Összesen $3 \cdot 15 = 45$ süteményt sütött Benedek, és ezeket 5 nap alatt eszi meg úgy, hogy minden nap ugyanannyi sütit eszik. Vagyis $45/5 = 9$ sütit eszik minden nap. Mivel egyfajta sütiből 15 -öt evett, és minden nap különböző pozitív egész darabszámút, ezért ez csak úgy lehet, ha az egyes napokon 1, 2, 3, 4 és 5 darab sütit evett. Vagyis a táblázat minden sorában az 1, 2, 3, 4, 5 számok mindegyikének pontosan egyszer kell szerepelnie.
Kezdjük el kitölteni a táblázatot az adott napon elfogyasztott sütik darabszámával. Először írjuk be azt, amit közvetlenül a feladat szövegéből tudunk.

	H	K	Sz	Cs	P
C		K	$S+1$	L	
D	3		S	L	
E		K			

Tudjuk, hogy hétfőn 3 diós sütit evett.
Illetve kedden ugyanannyi citromos sütit evett, mint epreset (K), csütörtökön pedig ugyanannyi citromos sütit, mint diósat (L).
Szerdán pedig eggyel több citromosat (S+1), mint diósat (S).

	H	K	Sz	Cs	P
C		K	$S+1$	L	
D	3	$1 \mid 5$	S	L	
E		K		$1 \mid 5$	

Mivel minden nap összesen 9 sütit eszik meg Benedek, így a keddi diós és a csütörtöki epres sütik száma is páratlan. Ráadásul egyik sem lehet 3. Az előbbi azért, mert minden sorban minden szám csak egyszer szerepel, és a 3 már szerepel hétfőn, a második pedig azért, mert ha az 3 lenne, akkor L is 3 lenne, és a második sorban már hétfőn szerepel a 3. Vagyis mindkét szám 1 vagy 5.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Tehetség Program
Kulturális és Innovációs Minisztérium
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

A keddi diósak száma azonban nem lehet 1, mert ha 1 lenne, akkor $K = 4$ lenne. Tekintsük a szerdai napot, és látható, hogy az epres sütik száma páros, hiszen a citromos és a diós összesen páratlan. Ha $K = 4$, akkor a szerdai epresek száma 2 lenne, vagyis $2S + 1 + 2 = 9$, amiből következik, hogy $S = 3$, és így $S + 1 = 4$. Ez azonban lehetetlen, hiszen akkor kétszer szerepelne a 4 az első sorban.

	H	K	Sz	Cs	P
C		2	$S+1$	L	
D	3	5	S	L	
E		2	4	1 | 5	

Vagyis a keddi diósak száma 5, így $K = 2$. A szerdai epresek száma pedig 4.

Ha a szerdai epresek száma 4, akkor $S = 2$, hiszen tudjuk, hogy $2S + 1 + 4 = 9$. Ebből viszont következik, hogy L nem lehet 2, vagyis a csütörtöki epresek száma nem lehet 5. A csütörtöki epresek száma tehát 1, így $L = 4$.

	H	K	Sz	Cs	P
C		2	3	4	
D	3	5	2	4	
E		2	4	1	

Vagyis a pénteki diósak száma 1, hiszen minden számnak pontosan egyszer kell szerepelnie egy sorban.

Viszont így a pénteki citromosak száma nem lehet 1, mert akkor aznap még 7 epreset kellene ennie. Tehát hétfőn evett 1, pénteken pedig 5 citromosat. Ebből következik, hogy pénteken 3 epreset evett, hétfőn pedig 5-öt.

	H	K	Sz	Cs	P
C	1	2	3	4	5
D	3	5	2	4	1
E	5	2	4	1	3

A feladatokat összeállította: Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Szepessy Luca.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Tehetség Program
Kulturális és Innovációs Minisztérium
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő