TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

53. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2024. május 25.

NYOLCADIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Szilvi felírt egy pozitív egész számot a papírjára, majd felírta a 3-szorosát is. Azt vette észre, hogy a kisebb szám jegyeinek összege éppen 3-szor akkora, mint a nagyobb szám jegyeinek az összege.

(a) Bizonyítsd be, hogy a kisebbik szám osztható 9-cel.

(b) Mutass példát ilyen számpárra.

Megoldás. A nagyobb szám osztható 3-mal, így számjegyeinek összege is osztható 3-mal.
Ennek háromszorosa így osztható lesz 9-cel.
Ez éppen a kisebb szám jegyeinek összege, tehát ez is osztható 9-cel.
Így a kisebb szám is osztható 9-cel.
Ilyen számpárra sok példa van. Néhány ezek közül: $(6777, 20331)$, $(26667, 80001)$, $(7037037; 21111111)$.

Megjegyzés. Hogyan lehet egy ilyen számpárt találni?
A nagyobb szám is osztható 9-cel, azaz a számjegyek összege legalább kilenc, így a kisebb szám számjegyeinek összege legalább 27. Próbáljuk meg elérni, hogy a nagyobb szám számjegyeinek összege 9, a kisebbé 27 legyen. Keressünk olyan számokat, aminél a számjegyek összege sokat csökken, ha megszorozzuk hárommal.
Egyjegyű számok közül a 7 ilyen, mivel a háromszorosa 21. A szám végén az 1-es mindenképpen megmarad, de a tízesek helyén a 2-es 0-vá alakítható, ha egy 6-ost írunk a 7-es elé, mivel a 67 háromszorosa 201. Hasonló módon írjunk még két 6-os a szám elejére, ekkor a 6667 háromszorosa 20001. Ahhoz, hogy 27 legyen az összeg, még egy 2-est kell a szám elejére írni, és ekkor a szám háromszorosa 80001, aminek a számjegyeinek összege 9. (Ez itt tűnhet szerencsének, hogy pont 9 lett az összeg, de az itt segített, hogy a szám 9-cel osztható, így a számjegyek összege 9 vagy 18 lehetett, viszont a 18-tól még messze voltunk, így várható volt, hogy a 9-et fogjuk megkapni.)

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

2. Igaz-e, hogy minden 10-zel nem osztható pozitív egész számnak van olyan többszöröse, amely ugyanolyan számjeggyel kezdődik, mint amilyennel végződik?

Megoldás. A 0 minden pozitív egésznek többszöröse, és 0-val kezdődik, 0-val végződik.

A feladat kitűzésekor a szerzők az alábbi kérdésre gondoltak: igaz-e, hogy minden 10-zel nem osztható pozitív egész számnak van olyan ***pozitív*** *többszöröse, amely ugyanolyan számjeggyel kezdődik, mint amilyennel végződik? Ekkor is igen a válasz, a továbbiakban ezt bizonyítjuk.*

Legyen n egy 10-zel nem osztható szám. Tekintsük az $n, 11n, 21n, 31n, \ldots$ sorozatot. Ennek tagjai mind ugyanarra az $A \neq 0$ számjegyre végződnek.
Legyen k olyan egész, amelyre $10^k > 10n$. Ekkor $A \cdot 10^k$ és $(A+1) \cdot 10^k$ közé esik biztosan egy B tagja a sorozatnak, hiszen a sorozat szomszédos tagjainak különbsége $10n$, viszont $A \cdot 10^k$ és $(A+1) \cdot 10^k$ különbsége 10^k, ami nagyobb $10n$-nél.
Ez a B szám n többszöröse, továbbá első és utolsó jegye is A.
Második megoldás. Legyen n egy tetszőleges pozitív egész szám, amelynek utolsó számjegye nem 0. Az alábbiakban mutatunk egy lehetséges módszert az n egy ilyen többszörösének legyártására.
Jelölje n utolsó számjegyét A, ami a feltevésünk szerint nem 0.
Először keressük meg n egy olyan többszörösét, amely A számjeggyel kezdődik. Legyen továbbá n számjegyeinek száma k, ekkor

$$10^k = \overline{1\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ db}}} > n.$$

Ezért $\overline{A\underbrace{00\ldots00}_{k\text{ db}}}$-től kezdve $\overline{A\underbrace{99\ldots99}_{k\text{ db}}}$-ig (azaz $A \cdot 10^k$-tól kezdve $\left(A \cdot 10^k + 10^k - 1\right)$-ig) találunk több, mint n darab egymást követő számot, melyek mindegyike A-val kezdődik. Ezek között biztosan van legalább egy n-nel osztható, ezt jelölje b.
Tehát b egy A számjeggyel kezdődő, n-nel osztható szám.
Írjunk b végére k darab 0-t, azaz szorozzuk meg 10^k-nal, majd a kapott számhoz adjuk hozzá n-t, így kapjuk a c számot (azaz $c = b \cdot 10^k + n$).
Belátjuk, hogy az így kapott c szám teljesíti a feladatban megfogalmazott elvárásokat.

- c osztható n-nel, hiszen b osztható n-nel,
  és ez megmarad a 0-k végére írásánál és az n hozzáadásánál is.

- c első számjegye A.
  Ugyanis $b \cdot 10^k$ utolsó k számjegye mind 0, ezért a k-jegyű n szám hozzáadása csak az utolsó k számjegyen változtathat. Azaz c első számjegye megegyezik b első számjegyével.

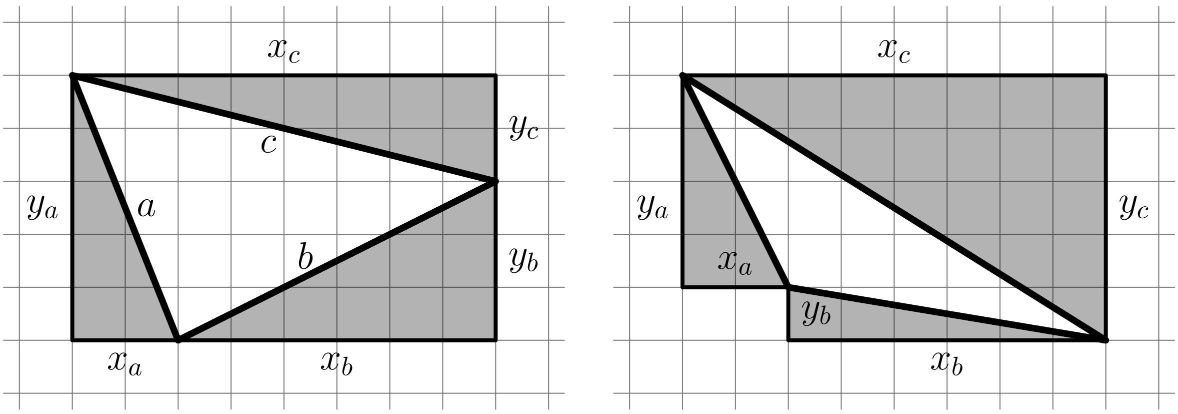
- c utolsó számjegye szintén A, hiszen $b \cdot 10^k$ utolsó számjegye 0,
  ezért c utolsó számjegye megegyezik n utolsó számjegyével.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

3. Egy négyzetrácsos papírra rajzoltunk egy háromszöget, amelynek minden csúcsa rácspont. A háromszög területe egész számú rácsnégyzet területével egyezik meg.
Bizonyítsd be, hogy van olyan oldala a háromszögnek, amelynek a felezőpontja is rácspont.

Megoldás. A megoldás során a rácsvonalakkal párhuzamos egyeneseket vízszintesnek, illetve függőlegesnek nevezzük. A hosszúságokat és a területeket minden esetben a négyzetrács egységei szerint mérjük.
A háromszög mindegyik oldalára kifelé rajzoljunk egy olyan derékszögű háromszöget, amelyiknek befogói párhuzamosak a négyzetrács vonalaival. Ezeket a háromszögeket színezzük szürkére.



Az a oldalra rajzolt háromszög vízszintes befogójának hosszát jelölje x_a, függőleges befogójának hosszát y_a; hasonlóan definiáljuk x_b, y_b, x_c, y_c értékeket. (Ha a háromszög valamelyik oldala párhuzamos a rácsvonalakkal, akkor tekintsük úgy, hogy a háromszög egyik befogója és így a háromszög területe is 0. Ha pl. a vízszintes, akkor x_a megegyezik a hosszával, míg $y_a = 0$.)
A befogók hosszának összege egy rácsnégyzetekből álló sokszög kerületét adja, amely biztosan páros szám. (A sokszög lehet téglalap vagy hatszög.) Így az $x_a + y_a$, $x_b + y_b$, $x_c + y_c$ összegek közül vagy egy páros és kettő páratlan, vagy mind a három páros.
Ha a páros összegek közül valamelyiket két páros szám ad, akkor a megfelelő oldal felezőpontja rácspont, így készen vagyunk. (Például ha x_a és y_a is páros, akkor az a oldal felezőpontja rácspont.)
Ha minden páros összeget két páratlan szám ad, akkor ezek szorzata is páratlan. Ezzel szemben ha két egész szám összege páratlan, akkor a szorzatuk páros. Tehát az $x_a y_a$, $x_b y_b$, $x_c y_c$ szorzatok közül egy páratlan és kettő páros, vagy mind a három páratlan. Így az $\frac{x_a y_a + x_b y_b + x_c y_c}{2} = \frac{x_a y_a}{2} + \frac{x_b y_b}{2} + \frac{x_c y_c}{2}$ mennyiség egy páratlan szám fele. Ez éppen a derékszögű háromszögek területének összege, amely tehát ebben az esetben nem egész szám.
Mivel a négy háromszög egyesítéseként kapott sokszög egész számú rácsnégyzetből áll, a területe egész. Az eredeti háromszög területe is egész, tehát a derékszögű háromszögek összterülete is egész. Így az előző eset nem állhat fenn. Ezzel az állítást beláttuk.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

4. Egy tornasorban n különböző magasságú ember áll, balról jobbra növekedve. Megkérhetünk négy szomszédos embert, hogy fordítsák meg a sorrendjüket (tehát ha A, B, C, D sorrendben álltak eddig, akkor a művelet után D, C, B, A sorrendben fognak állni).
Elérhető-e ilyen négyes megfordítások egymásutánjával, hogy megint tornasorban legyenek, de most jobbról balra növekedve, ha

(a) $n = 9$; (b) $n = 10$?

Megoldás. (a) Elérhető ilyen cserékkel:
$ABCDE(FGHI) \to ABCD(EIHG)F \to ABC(DGHI)EF \to (ABCI)HGDEF \to$
$I(CBAH)GDEF \to IH(ABCG)DEF \to IHGCB(ADEF) \to IHGC(BFED)A \to$
$IHG(CDEF)BA \to IHGFEDCBA$

(b) Nézzük meg, hogy hány olyan emberpár van, aminél a bal oldali ember a magasabb. Kezdetben 0 ilyen pár van, és az a célunk, hogy a végére minden ilyen legyen, azaz $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ ilyen pár legyen.
Egy lépésben 4 ember sorrendje fordul meg, azaz $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ pár cserélődik meg.
Ha a csere előtt a 4 ember 6 párja x esetben magasabb a bal oldali ember, akkor a csere után $6 - x$ esetben lesz az. Látható, hogy ha x páros, akkor $6 - x$ is páros, ha x páratlan, akkor $6 - x$ is páratlan. Mivel minden lépésben páros sokkal tud változni az ilyen párok száma, így nem érhető el az, hogy a végén páratlan sok ilyen pár legyen.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap
NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ