TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

53. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2024. május 24.

NYOLCADIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Amikor a kapitány annyi idős volt, mint most a hajója, akkor a hajó 23 éves volt. Amikor a hajó annyi idős lesz, mint most a kapitány, akkor a kapitány 68 éves lesz. Hány éves most a kapitány?

Megoldás. A korábbi időpont és a mostani között ugyanannyi idő telik el, mint a mostani és a későbbi között: ez az időtartam megegyezik a kapitány és a hajó életkorának különbségével.
Így ha a hajó korához a korábbi időpontban (23 év) hozzáadjuk ennek a különbségnek a háromszorosát, akkor megkapjuk a kapitány korát a későbbi időpontban (68 év). Ezért ez a különbség $(68-23):3=15$ év.
Tehát régen a kapitány $23+15=38$ éves volt (ugyanennyi most a hajó), most pedig $38+15=53$ éves.

Második megoldás. Jelöljük a kapitány életkorát K-val, a hajó életkorát H-val.
Az első mondat alapján, a kapitány $K-H$ éve volt annyi idős, mint a hajója, tehát a hajó $K-H$ éve volt 23 éves. Ezt úgy írharjuk fel, hogy $H-(K-H)=23$, vagyis $2H-K=23$.
A második mondat alapján, a hajó $K-H$ év múlva lesz annyi idős, mint a kapitány, így a kapitány $K-H$ év múlva lesz 68 éves. Ezt úgy írhatjuk fel, hogy $K+(K-H)=68$, azaz $2K-H=68$.
Az első egyenlet átírható úgy, hogy $K=2H-23$. A K-t behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $2(2H-23)-H=68$, azaz $3H=114$, vagyis a hajó 38 éves.
Ezt visszahelyettesítve a $K=2H-23$ egyenletbe megkapjuk, hogy a kapitány 53 éves.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

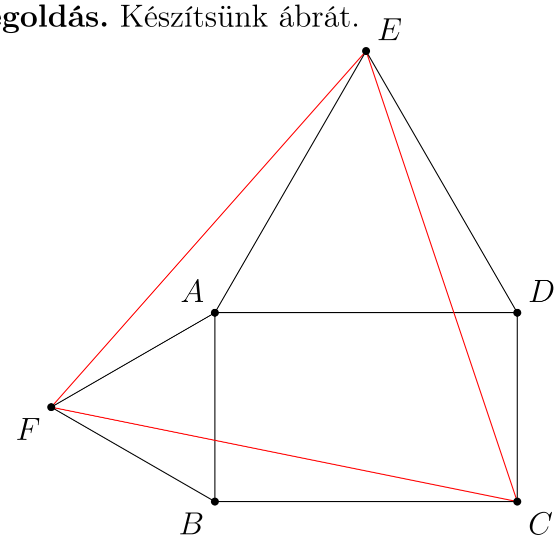
Nemzeti Kulturális Alap

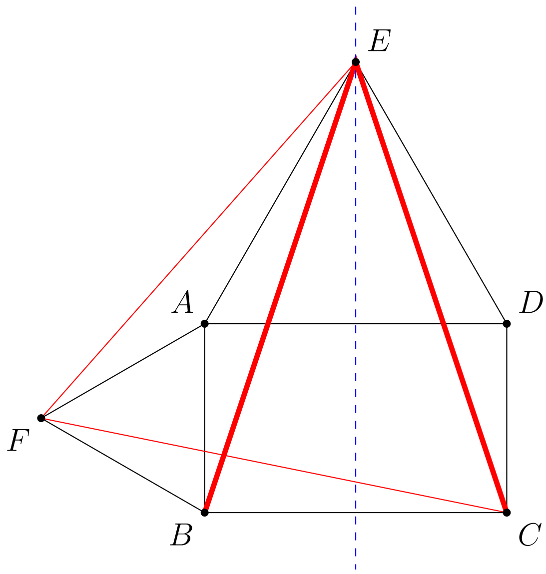
NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

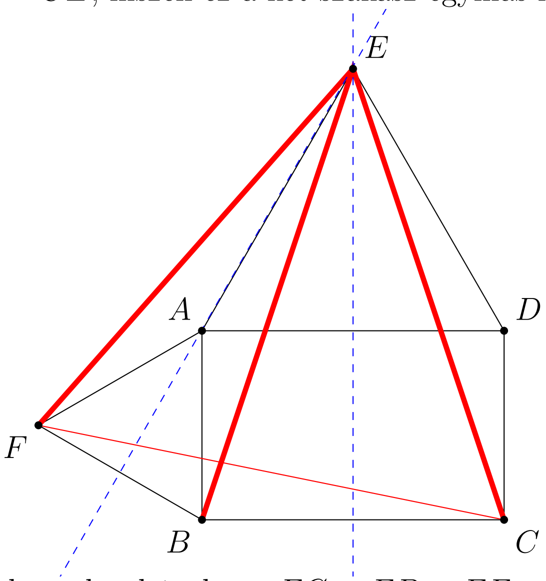
2. Az $ABCD$ téglalap AB és AD oldalára kifelé megrajzoljuk az ABF és ADE szabályos háromszögeket. Bizonyítsd be, hogy a CEF háromszög szabályos.

Megoldás. Készítsünk ábrát.





A BC szakasz felezőmerőlegese egyben az AD felezőmerőlegese is, ezért átmegy az E ponton. Ezért $BE = CE$, hiszen ez a két szakasz egymás képe a fenti felezőmerőlegesre tükrözve.



Másrészt vegyük észre, hogy FB felezőmerőlegese és az AE egyenes egybeesik.
Ezt például így láthajtjuk be:
Legyen FB felezőpontja G. Ekkor az ABF szabályos háromszögben az AG egyszerre felezőmerőleges és szögfelező, ezért $GAB\sphericalangle = 30°$. Világos, hogy $BAD\sphericalangle = 90°$ és $DAE\sphericalangle = 60°$, tehát:

$$\begin{aligned} GAE\sphericalangle &= GAB\sphericalangle + BAD\sphericalangle + DAE\sphericalangle \\ &= 30° + 90° + 60° = 180°. \end{aligned}$$

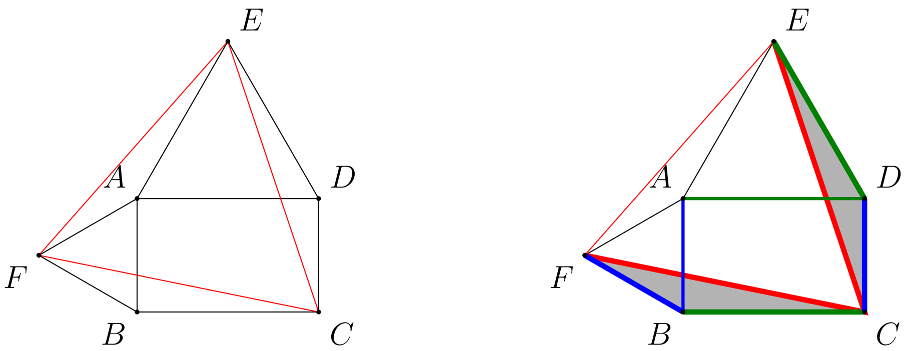
Tehát a GA és az AE szakasz egyenesszöget zár be, így tartóegyeneseik egybeesnek.
Ebből az következik, hogy $EF = EB$, hiszen egymás képei az AE egyenesre tükrözve.
Azt kaptuk tehát, hogy $EC = EB = EF$, amiből nekünk az a fontos, hogy $EC = EF$.
Ugyanilyen módszerrel belátható, hogy $FC = FD$ (ehhez az AB felezőmerőlegesére tükrözünk), illetve $FD = FE$ (ehhez az FA egyenesre – egyben DE felezőmerőlegesére – tükrözünk). Következésképpen $FC = FE$.
Összefoglalva: a CEF háromszögben $EC = FE = FC$, tehát valóban szabályos.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

Második megoldás. Készítsünk ábrát.



Vegyük észre, hogy FBC és CDE háromszögek egybevágók, hiszen

$$BC = AD = DE, \text{ illetve } FB = BA = CD;$$

a két megegyező oldal által bezárt szög pedig:

$$CBF\sphericalangle = CBA\sphericalangle + ABF\sphericalangle = 90^\circ + 60^\circ = ADC\sphericalangle + EDA\sphericalangle = EDC\sphericalangle.$$

Következésképpen $FC = CE$ (azaz CEF egyenlő szárú).
Elegendő belátnunk, hogy $ECF\sphericalangle = 60^\circ$, ebből következik, hogy FCE háromszög szabályos.
Világos, hogy $ECF\sphericalangle = DCB\sphericalangle - (DCE\sphericalangle + FCB\sphericalangle)$.
Az FBC és CDE háromszögek egybevágósága miatt $DCE\sphericalangle = BFC\sphericalangle$, azaz

$$DCE\sphericalangle + FCB\sphericalangle = BFC\sphericalangle + FCB\sphericalangle = 30^\circ,$$

hiszen $BFC\sphericalangle$ és $FCB\sphericalangle$ két belső szöge az FBC háromszögnek, melynek harmadik belső szögéről ($CBF\sphericalangle$) már megállapítottuk, hogy 150°.
Összegezve a fentieket éppen azt kapjuk, amit szerettünk volna belátni:

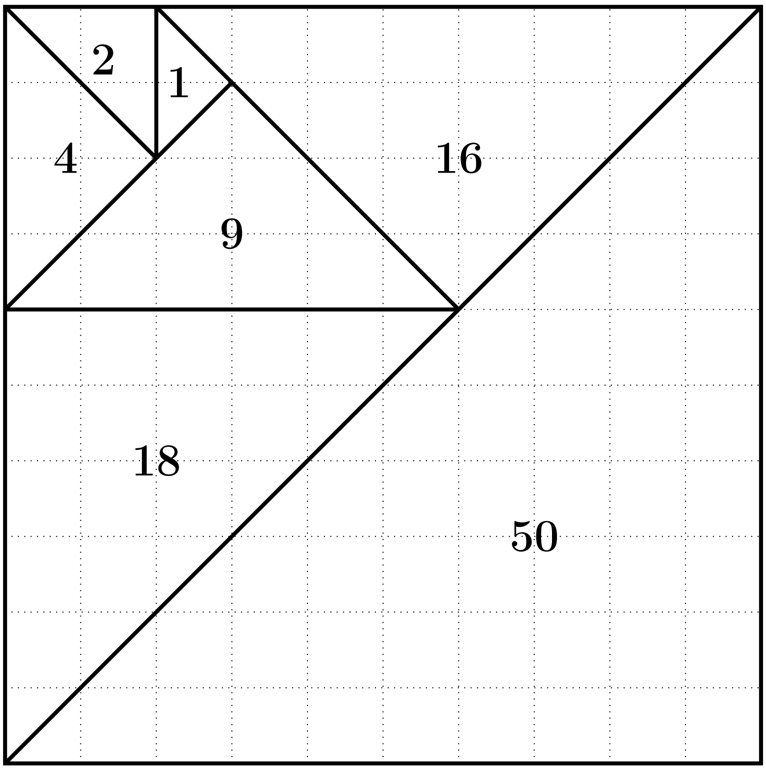
$$ECF\sphericalangle = DCB\sphericalangle - (BFC\sphericalangle + FCB\sphericalangle) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

3. Ossz fel egy 10 egység oldalhosszúságú négyzetet hét darab egyenlő szárú, derékszögű háromszögre, amelyek területe növekvő sorrendben: 1, 2, 4, 9, 16, 18, 50 területegység.
A teljes pontszám eléréséhez elengendő megadni egy olyan ábrát, amelyről a felosztás egyértelműen leolvasható. Az ábrán jelezd azt is, hogy melyik háromszög területe mekkora.
Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik egy helyes felosztás megtalálását.

Megoldás. A helyes felosztás:



Megjegyzés.
Az 50 területű háromszög az egész négyzet területének felét fedi le – ez csak úgy lehet, ha a négyzet egyik átlója megegyezik az átfogójával.
A 2, 18 és 50 területű háromszögek befogói egész hosszúságúak, rendre: 2, 6, 10.
Az 1, 4, 9 és 16 területű háromszögeknek viszont az átfogói lesznek egész hosszúságúak,
rendre: 2, 4, 6 és 8.
Ebből megsejthetjük, hogy ha egy a 10×10-es négyzetünket egy négyzetrácson helyezzük el, akkor a jó felosztásban a 2, 18 és 50 területű háromszögeknek a befogói lesznek párhuzamosak a rácsvonalakkal; míg a többi darabnál az átfogó lesz valamelyik rácsvonallal párhuzamos.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

4. Fióna egy szabályos pénzérmét dobál, amelynek egyik oldala fej (F), a másik pedig írás (I). Minden dobássorozat után feljegyzi, hogy hány esetben volt FF, FI, IF és II két egymást követő dobás. Ha például a dobássorozata FFIFFFIIIFFI, akkor a feljegyzésében 4 FF, 3 FI, 2 IF és 2 II szerepel.

(a) Hány különböző olyan dobássorozat lehetséges, amelynél pontosan 3 FF, 4 FI, 2 IF és 2 II szerepel a feljegyzésében?

(b) Hány különböző olyan dobássorozat lehetséges, amelynél pontosan 4 FF, 3 FI, 2 IF és 2 II szerepel a feljegyzésében?

Különbözőnek hívunk két dobássorozatot, ha azokban van olyan sorszámú dobás, ami a két sorozatban eltér.

Megoldás. (a) Első lépésként nézzük meg, hogy hogyan alakulhatnak a sorozatban az FI-k és az IF-k száma. Vegyük észre, hogy ha a sorozatban szerepel az FI, akkor a következő FI csak akkor lehet, ha a kettő között van IF is a sorozatban, mivel az FI után ahhoz, hogy újra FI legyen kell ismét egy F, viszont az első I betűk utáni F-nél lesz majd egy IF is.
Ez alapján, ha vesszük a 4 FI-t, akkor bármely kettő közt kell lennie egy IF-nek, vagyis legalább 3 IF-nek kéne lennie, azaz ilyen dobássorozat nem létezik.

(b) A sorozatban 3 FI van. Az előző részből kiindulva kell lennie egy IF-nek az első és második FI, valamint a második és a harmadik FI közt is.
Ezenkívül a sorozatban még FF és II sorozatok vannak, tehát a sorozat az alábbi módon fog kinézni: $\underbrace{F\dots F}_{a\text{ db}}\underbrace{I\dots I}_{b\text{ db}}\underbrace{F\dots F}_{c\text{ db}}\underbrace{I\dots I}_{d\text{ db}}\underbrace{F\dots F}_{e\text{ db}}\underbrace{I\dots I}_{f\text{ db}}$, ahol az azonos betűkből álló blokkok hossza legalább 1.
Ha van egy k hosszú F-ekből álló blokk, akkor abban $k-1$ darab FF pár van. Tehát ahhoz, hogy a három blokkban összesen 4 FF legyen, az kell, hogy $a+c+e=7$ legyen. Erre a következő lehetőségek vannak: 5+1+1 (3 lehetőség), 4+2+1 (6 lehetőség), 3+3+1 (3 lehetőség), 3+2+2 (3 lehetőség), ami összesen 15 lehetőség.
Hasonló módon, ahhoz, hogy két II legyen, a $b+d+f=5$-nek kell lennie. Erre az alábbi lehetőségek vannak: 3+1+1 (3 lehetőség), 2+2+1 (3 lehetőség), ami összesen 6 lehetőség.
Mivel az F- és I-blokkok méretei egymástól függetlenek, így a felbontások minden párosítása egy-egy jó megoldást fog adni, így összesen $15\cdot 6=90$ lehetőség van.

Második megoldás. (a) Az FI blokkokban szereplő 4 db F dobáson kívül kell lennie még 3 F-nek, amivel az FF blokkok kezdődnek. Az FI blokkokban szereplő 4 db I dobáson kívül pedig lennie kell még 2 I-nek, amivel az II blokkok végződnek. Ez összesen 13 dobás (7 F és 6 I) lenne, így összesen 12 blokk szerepelne a feljegyzésben, de csak $3+4+2+2=11$ szerepel. Tehát ilyen dobássorozat nem létezik.

(b) Most is 11 blokk van a feljegyzésben, így a sorozat 12 dobásból áll.
Az FI blokkokban szereplő 3 db F dobáson kívül kell lennie még 4 F-nek, amivel az FF blokkok kezdődnek. Az FI blokkokban szereplő 3 db I dobáson kívül pedig lennie kell még 2 I-nek, amivel az II

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ

blokkok végződnek. Ez 7 db F és 5 db I, így minden dobást megkaptunk, ezért a sorozat F-fel kezdődik és I-vel végződik.
A 7 db F közül az utolsót biztosan, és még két korábbit I követ. Ezeket $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$-féleképp választhatjuk ki. Az 5 db I közül az első, és még két további előtt F van. Ezeket $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$-féleképp választhatjuk ki. Ezzel egyértelműen megadtunk egy dobássorozatot, hiszen tudjuk, hogy hányadik F után jönnek I-k, és hányadik I kezd egy újabb I-s blokkot. A dobássorozatok száma tehát $15 \cdot 6 = 90$.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

5. Egy katonai ezred 999 katonája körben állva a kör közepe felé néz, az ezredes pedig a kör belsejében sétál körbe, végig az óramutató járásával megegyező irányban haladva. Először megáll egy katonánál, akinek azt mondja: „Hátra arc!”, mire ez a katona megfordul. Az ezredes ezután elsétál egy katona mellett, majd a következőnek újra „Hátra arc!”-ot vezényel, aki szintén megfordul. Ezután két katonát hagy ki, és a következőnek mondja a vezényszót, majd hármat hagy ki, és így tovább, mindig eggyel többet. Így folytatja egész addig, míg 998 katona mellett sétál el, majd utoljára, a 999. alkalommal is „Hátra arc!”-ot parancsol a következő katonának.
Hány katona néz kifelé a körből az utolsó „Hátra arc!” elhangzása után?

Megoldás. Számozzuk meg a körben lévő embereket 1-től 999-ig, az 1-es legyen az, akinek először parancsol az ezredes. Ekkor a harmadiknak parancsol másodjára, a hatodiknak harmadjára stb.
Vagyis az $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ összeg 999-es maradékának megfelelő sorszámú katona kapja az n. parancsot a megfordulásra. (Kivéve ha az összeg osztható 999-cel, mert akkor a 999-es.)
Vegyük észre, hogy

$$\frac{n(n+1)}{2}-\frac{k(k+1)}{2}=\frac{n^2+n-k^2-k}{2}=\frac{(n-k)(n+k+1)}{2}.$$

Ha $n+k=998$, akkor $n-k$ is páros, vagyis $\frac{n-k}{2}$ egész. Emiatt azonban $\frac{n(n+1)}{2}-\frac{k(k+1)}{2}$ osztható 999-cel, hiszen ilyenkor $\frac{n-k}{2}$ egész, $n+k+1$ pedig 999. Vagyis az n-edik és k-adik parancs ugyanannak a katonának szól, hiszen ekkor a két összeg 999-es maradéka megegyezik.
Tehát az 1. és 997., a 2. és 996. stb., és a 498. és 500. parancs ugyanannak a katonának szól, vagyis ezek a parancsok együttesen nem fordítanak kifelé katonát.
Marad a 499., 998. és 999. parancs. A 998. és a 999. parancs is ugyanannak a katonának szól, hiszen a végén egy teljes kört tesz meg az ezredes, mielőtt kiadja a 999. parancsot.
Tehát csak az az egy katona néz kifelé, akinek a 499. parancsot adta az ezredes.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő