TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

# 53. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

## Országos döntő – 2. nap – 2024. május 25.

## HETEDIK OSZTÁLY

## MEGOLDÁSOK

**1.** Anna, Bea, Cili és Dóra egy faluban laknak, mindegyiküknek egy téglalap alakú kertje van. A négy kert szélessége 12, 14, 16, illetve 18 méter valamilyen sorrendben, hosszuk pedig 40, 50, 60, illetve 70 méter valamilyen sorrendben. A lányok az alábbi **igaz** állításokat mondták a kertjükről:

Anna: Az én kertem szélesebb, mint Dóra kertje.
Bea: Az én kertem területe kevesebb, mint 1000 $m^2$.
Cili: A kertem területe ugyanakkora, mint Dóra kertjének területe.
Dóra: Bea kertje hosszabb, mint az én kertem.

Add meg, hogy kinek a kertje milyen széles és milyen hosszú.

**Megoldás.** Nézzük meg, hogy milyen méretűek lehetnek a kertek:

| | 12 m | 14 m | 16 m | 18 m |
|---|---|---|---|---|
| 40 m | 480 $m^2$ | 560 $m^2$ | 640 $m^2$ | 720 $m^2$ |
| 50 m | 600 $m^2$ | 700 $m^2$ | 800 $m^2$ | 900 $m^2$ |
| 60 m | 720 $m^2$ | 840 $m^2$ | 960 $m^2$ | 1080 $m^2$ |
| 70 m | 840 $m^2$ | 980 $m^2$ | 1120 $m^2$ | 1260 $m^2$ |

A lehetséges méretek közül csak a 720 $m^2$ és a 840 $m^2$ szerepel kétszer.
Ha Cilinek és Dórának 840 $m^2$-es a kertjük, akkor Dóra kertjének a hossza 60 vagy 70 méter, Bea kertjének hossza pedig 40 vagy 50 méter, így Dóra állítása nem lehet igaz.
Így csak az lehet, hogy Cili és Dóra kertje is 720 $m^2$. Vagyis egyikük kertje 40 méter hosszú és 18 méter széles, míg a másik kertje 60 méter hosszú és 12 méter széles.
Mivel Anna kertje szélesebb Dóráénál, így Dóra kertje a 60 méter hosszú és 12 méter széles, Cili kertje pedig 40 méter hosszú és 18 méter széles.
Mivel Bea kertje hosszabb Dóráénál, így az ő kertje 70 méter hosszú.
Mivel Bea kertje kisebb, mint 1000 $m^2$, így az ő kertje 14 méter széles.
Kizárásos alapon Anna kertje lesz 50 méter hosszú és 16 méter széles.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

**2.** Szilvi felírt egy pozitív egész számot a papírjára, majd felírta a 3-szorosát is. Azt vette észre, hogy a kisebb szám jegyeinek összege éppen 3-szor akkora, mint a nagyobb szám jegyeinek az összege.

(a) Bizonyítsd be, hogy a kisebbik szám osztható 9-cel.

(b) Mutass példát ilyen számpárra.

**Megoldás.** A nagyobb szám osztható 3-mal, így számjegyeinek összege is osztható 3-mal.
Ennek háromszorosa így osztható lesz 9-cel.
Ez éppen a kisebb szám jegyeinek összege, tehát ez is osztható 9-cel.
Így a kisebb szám is osztható 9-cel.
Ilyen számpárra sok példa van. Néhány ezek közül: $(6777, 20331)$, $(26667, 80001)$, $(7037037; 21111111)$.

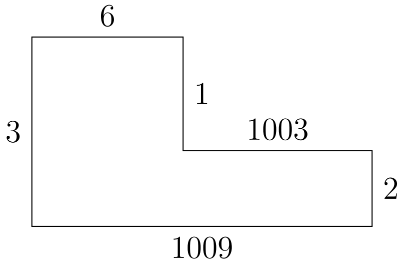
**Megjegyzés.** Hogyan lehet egy ilyen számpárt találni?
A nagyobb szám is osztható 9-cel, azaz a számjegyek összege legalább kilenc, így a kisebb szám számjegyeinek összege legalább 27. Próbáljuk meg elérni, hogy a nagyobb szám számjegyeinek összege 9, a kisebbé 27 legyen. Keressünk olyan számokat, aminél a számjegyek összege sokat csökken, ha megszorozzuk hárommal.
Egyjegyű számok közül a 7 ilyen, mivel a háromszorosa 21. A szám végén az 1-es mindenképpen megmarad, de a tízesek helyén a 2-es 0-vá alakítható, ha egy 6-ost írunk a 7-es elé, mivel a 67 háromszorosa 201. Hasonló módon írjunk még két 6-os a szám elejére, ekkor a 6667 háromszorosa 20001. Ahhoz, hogy 27 legyen az összeg, még egy 2-est kell a szám elejére írni, és ekkor a szám háromszorosa 80001, aminek a számjegyeinek összege 9. (Ez itt tűnhet szerencsének, hogy pont 9 lett az összeg, de az itt segített, hogy a szám 9-cel osztható, így a számjegyek összege 9 vagy 18 lehetett, viszont a 18-tól még messze voltunk, így várható volt, hogy a 9-et fogjuk megkapni.)

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

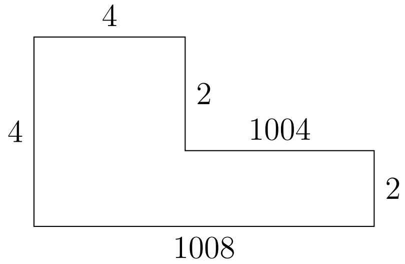
TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

**3.** Van-e olyan hatszög, amelynek szomszédos oldalai merőlegesek egymásra, mindegyik oldala milliméterben mérve egész hosszúságú, a kerülete 2024 mm, a területe pedig 2024 mm$^2$?

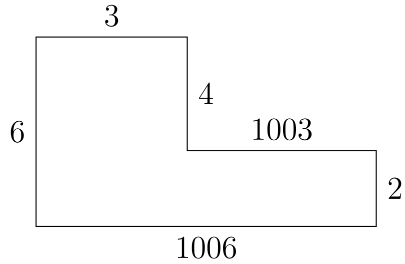
**Megoldás.** Van. Az alábbi hatszögek bármelyike megfelelő. (Az ábrákon az oldalhosszakat milliméterben adtuk meg.)




$K = 2024$ mm
$T = 3027 - 1003 = 2024$ mm$^2$

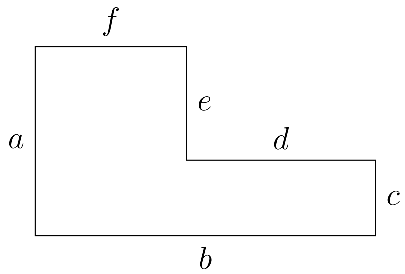



$K = 2024$ mm
$T = 4032 - 2008 = 2024$ mm$^2$




$K = 2024$ mm
$T = 6036 - 4012 = 2024$ mm$^2$

**Megjegyzés.** Nem nehéz meggondolni, hogy ha egy hatszög szomszédos oldalai merőlegesek, az lényegében csak ilyen szerkezetű lehet:




Az $a, b, c, d, e, f$ oldalhosszakra teljesülnie kell az $a = c + e$ és $b = d + f$ egyenlőségeknek.
A hatszög kerülete $K = a + b + c + d + e + f = 2a + 2b = 2(a + b)$.
A hatszög területe pedig egyszerűen felírható $T = ab - de$ alakban.
Elegendő tehát találnunk olyan $a > e$ és $b > d$ pozitív egészeket, amelyekre

$$a + b = 1012 \quad \text{és} \quad ab - de = 2024.$$

Megmutatható, hogy ezeknek a feltételeknek csak a fenti három megoldás tesz eleget.

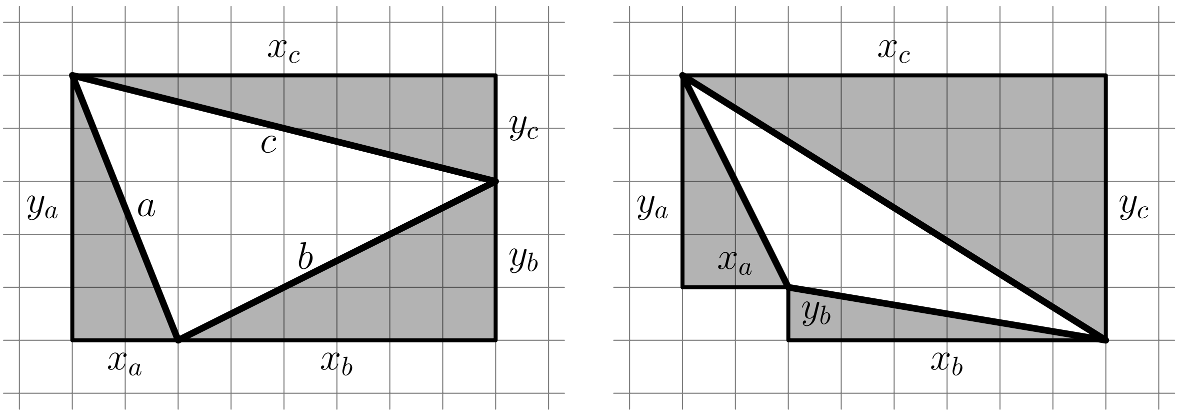
A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

**4.** Egy négyzetrácsos papírra rajzoltunk egy háromszöget, amelynek minden csúcsa rácspont. A háromszög területe egész számú rácsnégyzet területével egyezik meg.
Bizonyítsd be, hogy van olyan oldala a háromszögnek, amelynek a felezőpontja is rácspont.

**Megoldás.** A megoldás során a rácsvonalakkal párhuzamos egyeneseket vízszintesnek, illetve függőlegesnek nevezzük. A hosszúságokat és a területeket minden esetben a négyzetrács egységei szerint mérjük.
A háromszög mindegyik oldalára kifelé rajzoljunk egy olyan derékszögű háromszöget, amelyiknek befogói párhuzamosak a négyzetrács vonalaival. Ezeket a háromszögeket színezzük szürkére.




Az $a$ oldalra rajzolt háromszög vízszintes befogójának hosszát jelölje $x_a$, függőleges befogójának hosszát $y_a$; hasonlóan definiáljuk $x_b, y_b, x_c, y_c$ értékeket. (Ha a háromszög valamelyik oldala párhuzamos a rácsvonalakkal, akkor tekintsük úgy, hogy a háromszög egyik befogója és így a háromszög területe is 0. Ha pl. $a$ vízszintes, akkor $x_a$ megegyezik $a$ hosszával, míg $y_a = 0$.)
A befogók hosszának összege egy rácsnégyzetekből álló sokszög kerületét adja, amely biztosan páros szám. (A sokszög lehet téglalap vagy hatszög.) Így az $x_a + y_a$, $x_b + y_b$, $x_c + y_c$ összegek közül vagy egy páros és kettő páratlan, vagy mind a három páros.
Ha a páros összegek közül valamelyiket két páros szám ad, akkor a megfelelő oldal felezőpontja rácspont, így készen vagyunk. (Például ha $x_a$ és $y_a$ is páros, akkor az $a$ oldal felezőpontja rácspont.)
Ha minden páros összeget két páratlan szám ad, akkor ezek szorzata is páratlan. Ezzel szemben ha két egész szám összege páratlan, akkor a szorzatuk páros. Tehát az $x_a y_a$, $x_b y_b$, $x_c y_c$ szorzatok közül egy páratlan és kettő páros, vagy mind a három páratlan. Így az $\frac{x_a y_a + x_b y_b + x_c y_c}{2} = \frac{x_a y_a}{2} + \frac{x_b y_b}{2} + \frac{x_c y_c}{2}$ mennyiség egy páratlan szám fele. Ez éppen a derékszögű háromszögek területének összege, amely tehát ebben az esetben nem egész szám.
Mivel a négy háromszög egyesítéseként kapott sokszög egész számú rácsnégyzetből áll, a területe egész. Az eredeti háromszög területe is egész, tehát a derékszögű háromszögek összterülete is egész. Így az előző eset nem állhat fenn. Ezzel az állítást beláttuk.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ