TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

53. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2024. május 24.

HETEDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Jelölje „A” azoknak a négyjegyű számoknak a számát, amelyek felírhatóak három egymást követő pozitív egész szám összegeként. Legyen „B” azoknak a tízjegyű számoknak a száma, amelyek felírhatóak három egymást követő pozitív egész szám szorzataként.
Melyik a nagyobb, „A” vagy „B”?

Megoldás. A vizsgált négyjegyű számokból van több, azaz

$$A > B.$$

Ennek belátásához kiszámítjuk A pontos értékét, majd belátjuk, hogy B ennél kevesebb.
Egyrészt $332 + 333 + 334 = 999$ még háromjegyű, de $333 + 334 + 335 = 1002$ már négyjegyű. Másrészt $3332 + 3333 + 3334 = 9999$ még négyjegyű, de $3333 + 3334 + 3335 = 10\,002$ már ötjegyű.
Tehát pontosan akkor lesz három egymást követő pozitív egész szám összege négyjegyű, ha a legkisebb összeadandó legalább 333 de legfeljebb 3332.
Ilyen egész számból $3332 - 333 + 1 = 3000$ db van, tehát $A = 3000$.
Most becsüljük meg B-t. A legkisebb alkalmas szorzatot keresve megállapíthatjuk, hogy:
$999 \cdot 1000 \cdot 1001 = 999\,999\,000$ még kilencjegyű, de $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 = 1\,003\,002\,000$ már tízjegyű.
Ha $B \geq A = 3000$ lenne, akkor a $3999 \cdot 4000 \cdot 4001$ szorzatnak még tízjegyűnek kellene lennie (itt $3999 = 1000 + 3000 - 1$, így kaptuk ezt a számhármast). Azonban

$$3999 \cdot 4000 \cdot 4001 > 3000 \cdot 3000 \cdot 3000 = 27\,000\,000\,000,$$

tehát a $3999 \cdot 4000 \cdot 4001$ szorzat (legalább) 11-jegyű.
Ezzel beláttuk, hogy $A > B$.

Megjegyzés. Számológéppel (vagy sok türelemmel) meghatározható a legnagyobb alkalmas szorzat is: $2153 \cdot 2154 \cdot 2155 = 9\,993\,946\,110$ még tízjegyű; míg $2154 \cdot 2155 \cdot 2156 = 10\,007\,871\,720$ már 11-jegyű. (Segíthet a $\sqrt[3]{10} \approx 2{,}1544$ közelítő érték.) Tehát $B = 2153 - 1000 + 1 = 2154$.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

2. Egy táblára Elemér felírt az $1, 2, 3, \ldots, 2023$ számok közül néhányat. Minden szám legfeljebb egyszer szerepelt a táblán. Tudjuk, hogy a táblán lévő számok közül akárhányat választunk ki, a kiválasztott számok összege soha nem lesz pontosan 2024. Legfeljebb hány számot írhatott fel Elemér a táblára?

Megoldás. Vegyük a következő számokat: $1012, 1013, 1014, \ldots, 2022, 2023$. Ha ezek a számok vannak a táblán, akkor nincs olyan összeg, amely 2024-et adna, hiszen az elképzelhető legkisebb összeg is már nagyobb 2024-nél: $1012 + 1013 = 2025$.
Ez 1012 darab szám, tehát ennyit felírhatott Elemér a táblára.
Lássuk be, hogy 1012 számnál többet nem írhatott fel. Tekintsük az alábbi csoportokat:

$$(1, 2023), (2, 2022), (3, 2021), \ldots, (1011, 1013), (1012).$$

(Egy kivételével minden csoportban két szám van, és minden szám benne van pontosan egy csoportban.)
Ez összesen 1012 csoport. Ha tehát a táblán 1012-nél több szám lenne, akkor legalább az egyik csoportból két szám is a táblán lenne a skatulyaelv miatt. Ez azonban lehetetlen, hiszen ha egy csoportból veszünk két számot, akkor azok összege éppen 2024.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

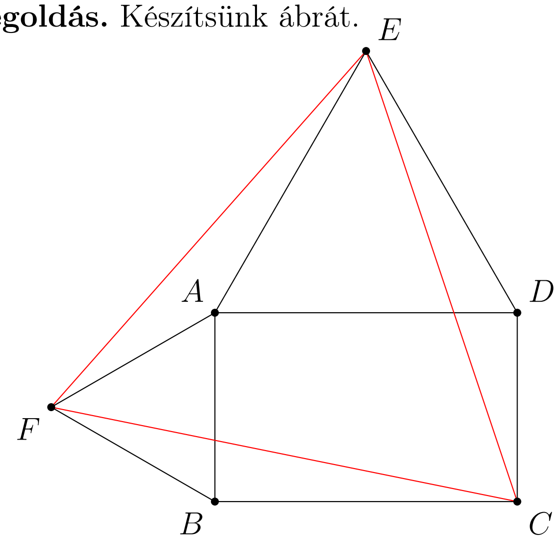
Nemzeti Kulturális Alap

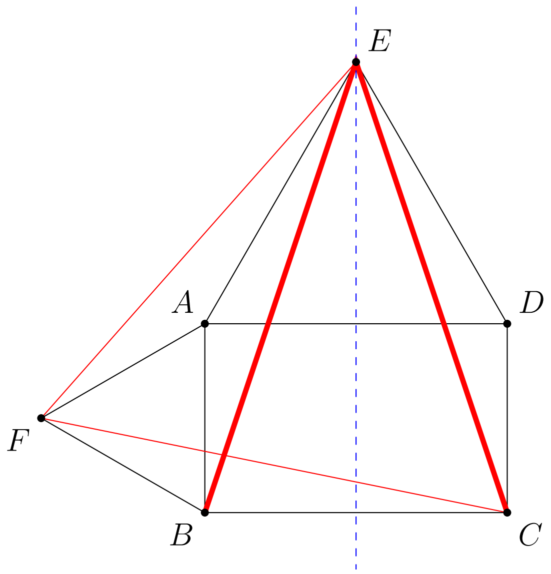
NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

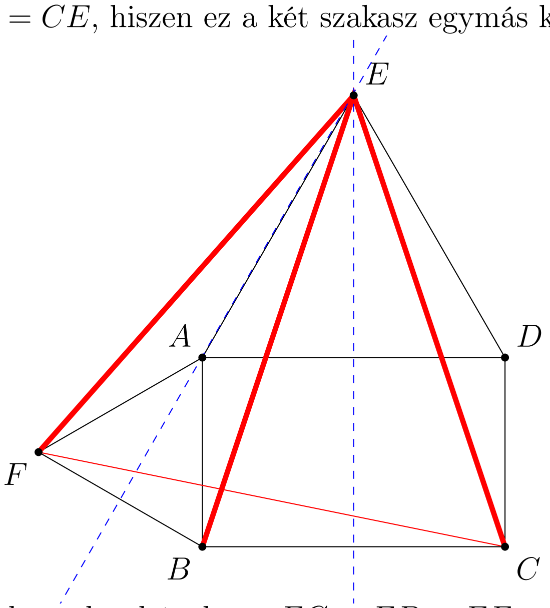
3. Az $ABCD$ téglalap AB és AD oldalára kifelé megrajzoljuk az ABF és ADE szabályos háromszögeket. Bizonyítsd be, hogy a CEF háromszög szabályos.

Megoldás. Készítsünk ábrát.





A BC szakasz felezőmerőlegese egyben az AD felezőmerőlegese is, ezért átmegy az E ponton. Ezért $BE = CE$, hiszen ez a két szakasz egymás képe a fenti felezőmerőlegesre tükrözve.



Másrészt vegyük észre, hogy FB felezőmerőlegese és az AE egyenes egybeesik.
Ezt például így láthajtjuk be:
Legyen FB felezőpontja G. Ekkor az ABF szabályos háromszögben az AG egyszerre felezőmerőleges és szögfelező, ezért $GAB\sphericalangle = 30°$. Világos, hogy $BAD\sphericalangle = 90°$ és $DAE\sphericalangle = 60°$, tehát:

$$\begin{aligned} GAE\sphericalangle &= GAB\sphericalangle + BAD\sphericalangle + DAE\sphericalangle \\ &= 30° + 90° + 60° = 180°. \end{aligned}$$

Tehát a GA és az AE szakasz egyenesszöget zár be, így tartóegyeneseik egybeesnek.
Ebből az következik, hogy $EF = EB$, hiszen egymás képei az AE egyenesre tükrözve.

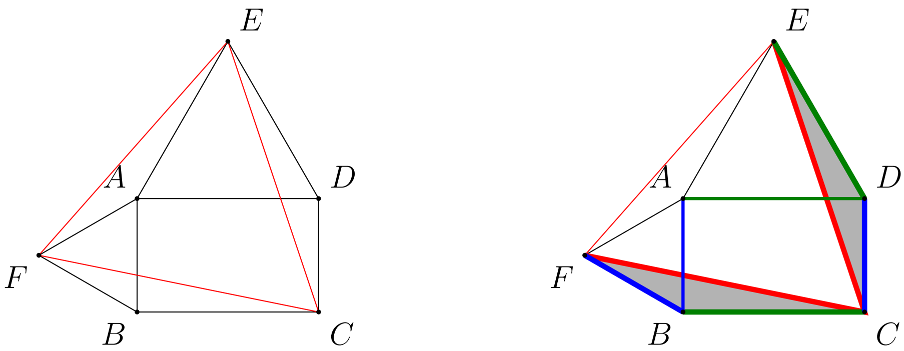
Azt kaptuk tehát, hogy $EC = EB = EF$, amiből nekünk az a fontos, hogy $EC = EF$.
Ugyanilyen módszerrel belátható, hogy $FC = FD$ (ehhez az AB felezőmerőlegesére tükrözünk), illetve $FD = FE$ (ehhez az FA egyenesre – egyben DE felezőmerőlegesére – tükrözünk). Következésképpen $FC = FE$.
Összefoglalva: a CEF háromszögben $EC = FE = FC$, tehát valóban szabályos.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

Második megoldás. Készítsünk ábrát.



Vegyük észre, hogy FBC és CDE háromszögek egybevágók, hiszen

$$BC = AD = DE, \text{ illetve } FB = BA = CD;$$

a két megegyező oldal által bezárt szög pedig:

$$CBF\sphericalangle = CBA\sphericalangle + ABF\sphericalangle = 90° + 60° = ADC\sphericalangle + EDA\sphericalangle = EDC\sphericalangle.$$

Következésképpen $FC = CE$ (azaz CEF egyenlő szárú).
Elegendő belátnunk, hogy $ECF\sphericalangle = 60°$, ebből következik, hogy FCE háromszög szabályos.
Világos, hogy $ECF\sphericalangle = DCB\sphericalangle - (DCE\sphericalangle + FCB\sphericalangle)$.
Az FBC és CDE háromszögek egybevágósága miatt $DCE\sphericalangle = BFC\sphericalangle$, azaz

$$DCE\sphericalangle + FCB\sphericalangle = BFC\sphericalangle + FCB\sphericalangle = 30°,$$

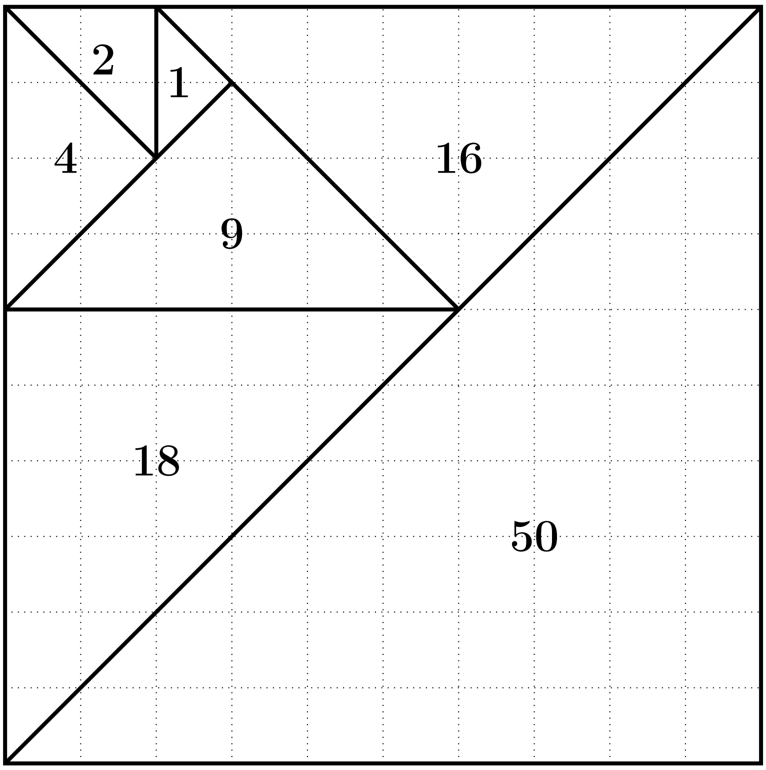
hiszen $BFC\sphericalangle$ és $FCB\sphericalangle$ két belső szöge az FBC háromszögnek, melynek harmadik belső szögéről ($CBF\sphericalangle$) már megállapítottuk, hogy 150°.
Összegezve a fentieket éppen azt kapjuk, amit szerettünk volna belátni:

$$ECF\sphericalangle = DCB\sphericalangle - (BFC\sphericalangle + FCB\sphericalangle) = 90° - 30° = 60°.$$

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ

4. Ossz fel egy 10 egység oldalhosszúságú négyzetet hét darab egyenlő szárú, derékszögű háromszögre, amelyek területe növekvő sorrendben: 1, 2, 4, 9, 16, 18, 50 területegység.
A teljes pontszám eléréséhez elengendő megadni egy olyan ábrát, amelyről a felosztás egyértelműen leolvasható. Az ábrán jelezd azt is, hogy melyik háromszög területe mekkora.
Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik egy helyes felosztás megtalálását.

Megoldás. A helyes felosztás:



Megjegyzés.
Az 50 területű háromszög az egész négyzet területének felét fedi le – ez csak úgy lehet, ha a négyzet egyik átlója megegyezik az átfogójával.
A 2, 18 és 50 területű háromszögek befogói egész hosszúságúak, rendre: 2, 6, 10.
Az 1, 4, 9 és 16 területű háromszögeknek viszont az átfogói lesznek egész hosszúságúak, rendre: 2, 4, 6 és 8.
Ebből megsejthetjük, hogy ha egy a 10×10-es négyzetünket egy négyzetrácson helyezzük el, akkor a jó felosztásban a 2, 18 és 50 területű háromszögeknek a befogói lesznek párhuzamosak a rácsvonalakkal; míg a többi darabnál az átfogó lesz valamelyik rácsvonallal párhuzamos.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

5. Egy körasztal körül különböző életkorú emberek ülnek és a következő játékot játsszák: valamelyikük feláll, a két szomszédja egymással helyet cserél, majd az álló játékos visszaül a helyére.
Azt szeretnék elérni, hogy mindenkinek a jobb oldalán nála idősebb ember üljön, kivéve a legidősebbet, akitől jobbra a legfiatalabb foglaljon helyet.
Igaz-e, hogy el tudják érni a céljukat, akármilyen sorrendben is ültek le az elején, ha

(a) 10 (b) 11

ember ült kezdetben az asztal körül?

Megoldás.

(a) Számozzuk meg sorban a székeket 1-től 10-ig. Minden ember, aki átül valamelyik másik helyre, akkor 2-vel kisebb vagy nagyobb sorszámú helyre (vagy ha átlépi az 1-es és 10-es szék közti vonalat, akkor 8-cal kisebb vagy nagyobb sorszámú helyre) fog átülni. Mivel a hely sorszáma mindig páros sokkal változik, így aki kezdetben páros sorszámú széken ült, az végig páros sorszámún fog, aki kezdetben páratlanon, az végig páratlanon fog ülni.

Ha kezdetben a legidősebb és a legfiatalabb is páros sorszámú székre ült, akkor ők végig páros széken lesznek, vagyis soha nem tudnak egymás mellé ülni, így ekkor nem tudják elérni a céljukat.

(b) Számozzuk meg sorban a székeket 1-től 11-ig. Minden ember, aki átül valamelyik másik helyre, akkor 2-vel kisebb vagy nagyobb sorszámú helyre (vagy ha átlépi az 1-es és 11-es szék közti vonalat, akkor 9-cel kisebb vagy nagyobb sorszámú helyre) fog átülni.

Rendezzük át a székeket a következő sorrendbe: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 2, 4, 6, 8, 10. Megfigyelhető, hogy ebben a sorrendben pontosan azok a székpárok vannak egymás mellett, amik közt az előző elrendezés szerint lehetett helyet cserélni. Vagyis ha tartjuk az előző elrendezés szerinti cserélgetések szabályait, akkor most a szomszédos székek közti emberek tudnak majd helyet cserélni.

Elsőként cseréljük meg páronként az embereket úgy, hogy a legfiatalabb kerüljön az 1-es székre. Ezután az 1-es széket nem használva cseréljük a 3-as székre a harmadik legfiatalabb embert, majd az 5-ös székre az ötödik legfiatalabbat, és így tovább, minden székre cseréljük be az adott sorszámnak megfelelő korú embert.

Ha mindenki a helyére került, akkor a székeket az eredeti sorrend szerint visszarendezve a feltételeknek megfelelő sorrendet fogunk kapni, vagyis ekkor minden esetben el tudják érni a céljukat.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.