TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

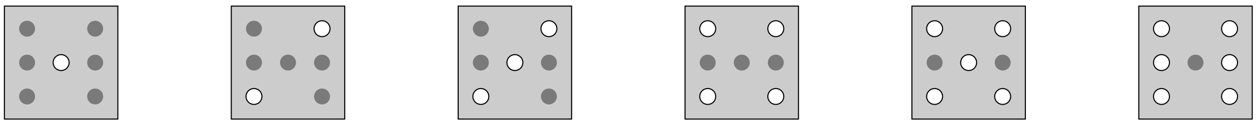
53. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2024. május 25.

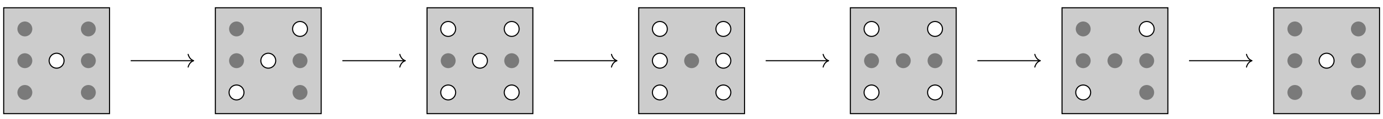
HATODIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Egy dobókocka-szimulátor hét kis lámpa segítségével jeleníti meg a számokat az ábrán látható módon. Legkevesebb hány lámpakapcsolásra van szükség ahhoz, hogy az egyesből indulva az összes szám megjelenjen valamilyen sorrendben, majd újra az egyest lássuk?



Megoldás. Ha kezdetben az 1-esnek megfelelően csak a középső lámpa világít, majd valamikor elérjük a 6-ost, ahol csak a középső lámpa nem világít, akkor ehhez mind a hét lámpát legalább egyszer kell kapcsolni. Ugyanígy mind a hét lámpát kell kapcsolni legalább egyszer, míg a 6-os állásból visszatérünk az 1-esbe. Ez azt jelenti, hogy biztosan szükségünk lesz legalább 14 kapcsolásra.
Megmutatjuk, hogy lehetséges is ennyivel. Például az alábbi sorrend nem igényel 14-nél több kapcsolást.



A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

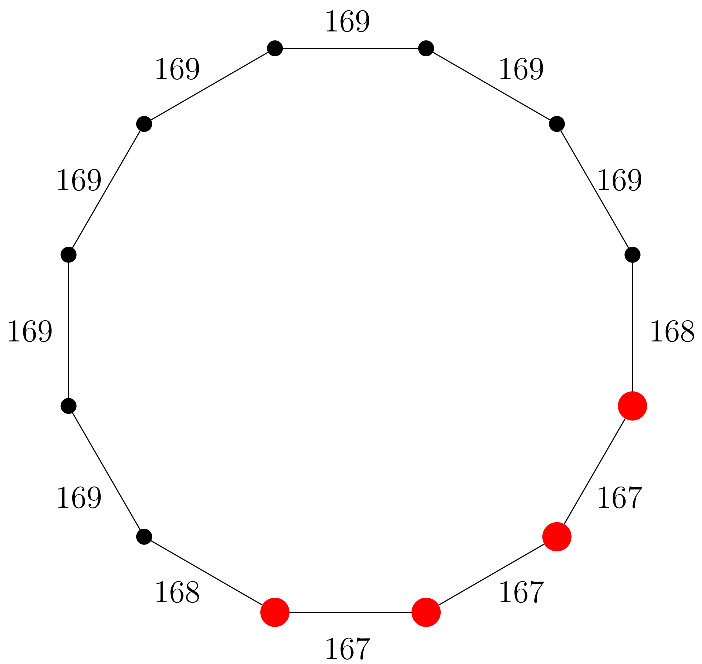
Nemzeti Kulturális Alap

Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

TIT - Kalmár László
Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

2. Egy szabályos 12-szög kerületén pirossal megjelöltem 2024 pontot úgy, hogy minden oldalán ugyanannyi piros pont van. A 12-szögnek hány csúcsát jelölhettem meg pirossal?

Megoldás. Számoljuk össze külön-külön mind a 12 oldalra, hogy hány piros pont van rajta, majd ezt a 12 számot adjuk össze, ezt az összeget nevezzük S-nek.
Mivel mind a 12 oldalon ugyanannyi pont van, így persze ugyanazt a számot adjuk össze 12-szer, tehát S osztható 12-vel.
Így minden piros pontot egyszer számoltunk meg, kivéve a csúcsokba eső piros pontokat, amelyeket két oldalnál is megszámoltunk.
Azaz S éppen annyival több 2024-nél, mint ahány pirossal megjelölt csúcs van.
Mivel összesen 12 csúcs van, ezért S legfeljebb 2036 lehet.
Mint korábban megállapítottuk, S-nek oszthatónak kell lennie 12-vel, márpedig a $2024, 2025, \ldots, 2036$ számok közt egyetlen 12-vel osztható van, a 2028. Tehát S csak 2028 lehet, ami 4-gyel több a 2024-nél.
Tehát biztos, hogy 4 csúcsot jelöltem meg pirossal.
Konstrukció, amelyben 4 csúcs piros, és a számok azt jelzik, hogy az adott oldal belsejében hány piros pont van:



A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

3. Egy 3×3-as táblázatba beírtuk a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ számokat, mindegyik számot pontosan egy mezőbe. Egy mezőt **kerek**nek nevezünk, ha a vele élszomszédos mezőkre írt számok összege 10. Legfeljebb hány kerek mező lehet a táblázatban?

Megoldás. Jelöljük betűkkel a négyzetbe írt számokat az alábbi módon, és színezzük is meg a mezőket.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

A és E nem lehet egyszerre kerek, mert akkor $B + D$ és $B + D + F + H$ is 10 lenne, vagyis $F + H = 0$ lenne, ami lehetetlen. Ugyanígy E és G sem lehet kerek egyszerre.
A és G sem lehet kerek egyszerre, mert akkor $B + D$ és $D + H$ is 10 lenne, amiből következik, hogy $B = H$, ami szintén lehetetlen. (Így a három sárga mezőn álló szám közül legfeljebb egy lehet kerek.) Ugyanígy kapjuk, hogy C és I (a két fehér mezőn álló szám) sem lehet kerek egyszerre.
Ha B és F (a két piros mezőn lévő szám) is kerek lenne, akkor $A + C + E$ és $C + E + I$ is 10 lenne, vagyis A és I egyenlő lenne, ami lehetetlen. Hasonlóan kapjuk, hogy D és H (a két kék mezőn lévő szám) sem lehet kerek egyszerre.
Ezzel beláttuk, hogy az azonos színnel jelölt számok közül legfeljebb egy lehet kerek. Mivel négy színt használtunk, ezért legfeljebb 4 kerek szám lehet a táblázatban.
Az pedig elérhető, hogy 4 mező legyen kerek:

0	2	1
8	4	**3**
6	7	**5**

Megjegyzés. Hogyan lehet megtalálni a konstrukciót?
Látható, hogy ha A kerek, akkor C nem lehet az, így I-nek kellene kereknek lennie. Ugyanígy, ha D kerek, akkor B nem lehet kerek, csak F. Próbáljuk elérni, hogy ez a 4 mező (A, D, F, I) legyen kerek. Írjuk fel a kerek mezők szomszédait:

$$(B + D) + (F + H) + (A + E + G) + (C + E + I) = 10 + 10 + 10 + 10 = 40.$$

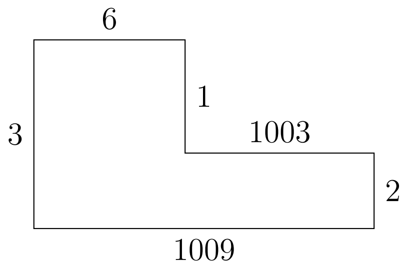
Ebben az összegben minden szám 1-szer szerepel az E kivételével, ami viszont kétszer. A táblázatban a számok összege 36, így $E = 40 - 36 = 4$. Vagyis $A + G = C + I = 6$. Ez pedig a megmaradó számokból csak a 0-6-ra és az 1-5-re teljesül. Ezután a maradék számokból is tudunk két párt képezni, amiknek az összege 10. (A 2-8 és a 3-7.)

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ

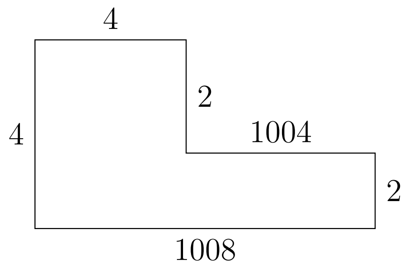
TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

4. Van-e olyan hatszög, amelynek szomszédos oldalai merőlegesek egymásra, mindegyik oldala milliméterben mérve egész hosszúságú, a kerülete 2024 mm, a területe pedig 2024 mm^2?

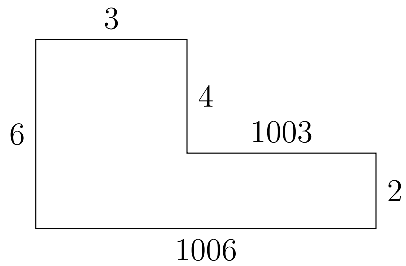
Megoldás. Van. Az alábbi hatszögek bármelyike megfelelő. (Az ábrákon az oldalhosszakat milliméterben adtuk meg.)



$K = 2024$ mm
$T = 3027 - 1003 = 2024$ mm^2

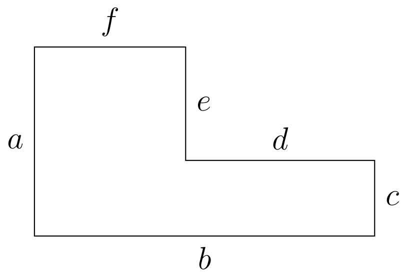


$K = 2024$ mm
$T = 4032 - 2008 = 2024$ mm^2



$K = 2024$ mm
$T = 6036 - 4012 = 2024$ mm^2

Megjegyzés. Nem nehéz meggondolni, hogy ha egy hatszög szomszédos oldalai merőlegesek, az lényegében csak ilyen szerkezetű lehet:



Az a, b, c, d, e, f oldalhosszakra teljesülnie kell az $a = c + e$ és $b = d + f$ egyenlőségeknek.
A hatszög kerülete $K = a + b + c + d + e + f = 2a + 2b = 2(a + b)$.
A hatszög területe pedig egyszerűen felírható $T = ab - de$ alakban.
Elegendő tehát találnunk olyan $a > e$ és $b > d$ pozitív egészeket, amelyekre

$$a + b = 1012 \quad \text{és} \quad ab - de = 2024.$$

Megmutatható, hogy ezeknek a feltételeknek csak a fenti három megoldás tesz eleget.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap
NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ