TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

53. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2024. május 25.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Öt gyerek beszélget a labdáikról. Minden gyereknek legalább egy és legfeljebb öt labdája van, továbbá semelyik két gyereknek nincs ugyanannyi labdája. Az alábbi **igaz** állításokat mondják:

Alíz:	Több labdám van, mint Boldizsárnak.
Boldizsár:	Nem két labdám van.
Csenge:	Annyi labdám van, mint Alíznak és Elemérnek összesen.
Dorka:	Szeretem a labdákat.
Elemér:	Ha Alíz labdáinak a számát megszorozzuk Boldizsár labdáinak számával, akkor a kapott szám nagyobb, mint Csenge labdáinak a száma.

Kinek hány labdája van?

Megoldás. Mivel Csengének annyi labdája van, mint Alíznak és Elemérnek összesen, így Csengének több labdája van, mint Alíznak.
Ha Boldizsárnak csak 1 labdája lenne, akkor az előző megfigyelés alapján, nem lehetne igaz Elemér állítása, így Boldizsárnak nem egy labdája van.
Mivel Alíznak több labdája van, mint Boldizsárnak, Csengének pedig több labdája, mint Alíznak, Csengének pedig legfeljebb öt labdája van, így Boldizsárnak legfeljebb három labdája lehet.
Mivel Boldizsárnak nem lehet két labdája, így neki csak három labdája lehet.
Ekkor Alíznak négy, Csengének öt labdája van.
Csenge állítás miatt a maradék két ember közül Elemérnek van egy labdája, Dorkának pedig két labdája.

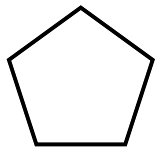
A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap
NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ

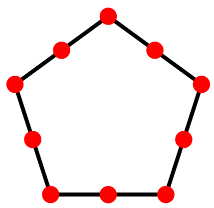
TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

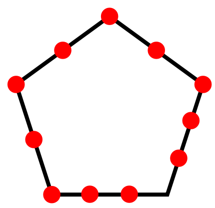
2. Az ábrán látható szabályos ötszög kerületén pirossal megjelöltünk néhány pontot úgy, hogy minden oldalán pontosan három piros pont van.
Összesen hány pontot jelölhettünk meg pirossal?
Mutass példát az összes lehetőségre, és indokold, hogy ezeken kívül más lehetőség nincs.



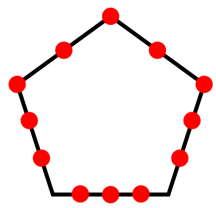
Megoldás. Számoljuk meg a piros pontokat oldalanként: $5 \cdot 3 = 15$. Ha minden piros pontot pontosan egyszer számolunk így, akkor megkapjuk a piros pontok maximális számát, ami 15.
Ha egy piros pont csúcsra esik, akkor azt az előző számítással kétszer számoltuk meg, vagyis a piros pontok valódi száma annyival kevesebb 15-nél, ahány csúcs piros. Mivel legfeljebb 5 csúcs lehet piros, így legalább $15 - 5 = 10$ piros pontra van szükség.
Vagyis 10, 11, 12, 13, 14 vagy 15 pontot jelölhettem meg pirossal.
Mindegyik esetre mutatunk egy-egy példát:



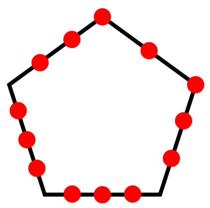
10 piros pont



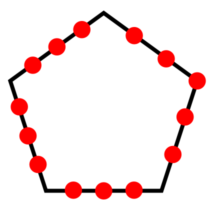
11 piros pont



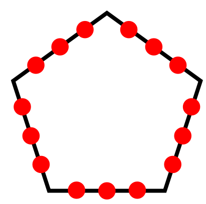
12 piros pont



13 piros pont



14 piros pont



15 piros pont

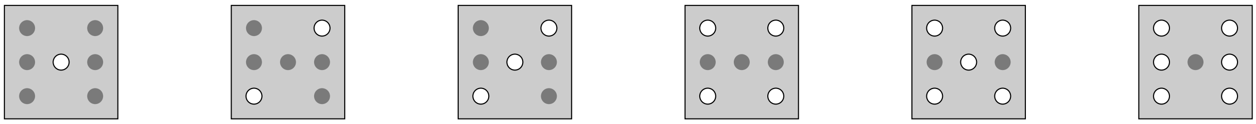
A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

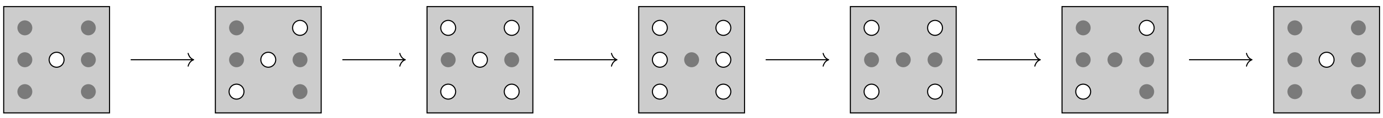
NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

3. Egy dobókocka-szimulátor hét kis lámpa segítségével jeleníti meg a számokat az ábrán látható módon. Legkevesebb hány lámpakapcsolásra van szükség ahhoz, hogy az egyesből indulva az összes szám megjelenjen valamilyen sorrendben, majd újra az egyest lássuk?



Megoldás. Ha kezdetben az 1-esnek megfelelően csak a középső lámpa világít, majd valamikor elérjük a 6-ost, ahol csak a középső lámpa nem világít, akkor ehhez mind a hét lámpát legalább egyszer kell kapcsolni. Ugyanígy mind a hét lámpát kell kapcsolni legalább egyszer, míg a 6-os állásból visszatérünk az 1-esbe. Ez azt jelenti, hogy biztosan szükségünk lesz legalább 14 kapcsolásra.
Megmutatjuk, hogy lehetséges is ennyivel. Például az alábbi sorrend nem igényel 14-nél több kapcsolást.



A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: `https://www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

4. Egy 3×3-as táblázatba beírtuk a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ számokat, mindegyik számot pontosan egy mezőbe. Egy mezőt **kerek**nek nevezünk, ha a vele élszomszédos mezőkre írt számok összege 10. Legfeljebb hány kerek mező lehet a táblázatban?

Megoldás. Jelöljük betűkkel a négyzetbe írt számokat az alábbi módon, és színezzük is meg a mezőket.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

A és E nem lehet egyszerre kerek, mert akkor $B+D$ és $B+D+F+H$ is 10 lenne, vagyis $F+H=0$ lenne, ami lehetetlen. Ugyanígy E és G sem lehet kerek egyszerre.
A és G sem lehet kerek egyszerre, mert akkor $B+D$ és $D+H$ is 10 lenne, amiből következik, hogy $B=H$, ami szintén lehetetlen. (Így a három sárga mezőn álló szám közül legfeljebb egy lehet kerek.) Ugyanígy kapjuk, hogy C és I (a két fehér mezőn álló szám) sem lehet kerek egyszerre.
Ha B és F (a két piros mezőn lévő szám) is kerek lenne, akkor $A+C+E$ és $C+E+I$ is 10 lenne, vagyis A és I egyenlő lenne, ami lehetetlen. Hasonlóan kapjuk, hogy D és H (a két kék mezőn lévő szám) sem lehet kerek egyszerre.
Ezzel beláttuk, hogy az azonos színnel jelölt számok közül legfeljebb egy lehet kerek. Mivel négy színt használtunk, ezért legfeljebb 4 kerek szám lehet a táblázatban.
Az pedig elérhető, hogy 4 mező legyen kerek:

0	2	1
8	4	**3**
6	7	**5**

Megjegyzés. Hogyan lehet megtalálni a konstrukciót?
Látható, hogy ha A kerek, akkor C nem lehet az, így I-nek kellene kereknek lennie. Ugyanígy, ha D kerek, akkor B nem lehet kerek, csak F. Próbáljuk elérni, hogy ez a 4 mező (A, D, F, I) legyen kerek. Írjuk fel a kerek mezők szomszédait:

$$(B+D)+(F+H)+(A+E+G)+(C+E+I)=10+10+10+10=40.$$

Ebben az összegben minden szám 1-szer szerepel az E kivételével, ami viszont kétszer. A táblázatban a számok összege 36, így $E=40-36=4$. Vagyis $A+G=C+I=6$. Ez pedig a megmaradó számokból csak a 0-6-ra és az 1-5-re teljesül. Ezután a maradék számokból is tudunk két párt képezni, amiknek az összege 10. (A 2-8 és a 3-7.)

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ