TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

47. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

NYOLCADIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Hány különböző módon lehet felírni az 1024-et két pozitív négyzetszám összegeként? (Az összeadás sorrendje nem számít.)

Megoldás

Az 1024 nem írható fel két pozitív négyzetszám összegeként. (*1 pont*)

Az 1024 osztható 4-gyel. Egy négyzetszám 4-es maradéka 0 vagy 1 lehet, ezért két négyzetszám összege csak úgy lehet néggyel osztható, ha mind a kettő páros. (*2 pont*)

Legyen a két négyzetszám alapja $2a$ és $2b$, ekkor $1024 = (2a)^2 + (2b)^2 = 4a^2 + 4b^2$. Az egyenlőség mindkét oldalát le lehet osztani 4-gyel, így a $256 = a^2 + b^2$ egyenlethez jutunk. (*2 pont*)

Erre az egyenletre újra elmondható az eredeti gondolatmenet. Az $a = 2c$ és $b = 2d$ felírással a $64 = c^2 + d^2$ egyenlőséghez jutunk. (*1 pont*)

A fenti gondolatmenetet még háromszor elmondva két pozitív négyzetszámhoz jutunk, melyek összege 1, és ez nyilván lehetetlen. (*1 pont*)

Összesen: 7 pont

2. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög (az ábécé szomszédos betűi a hatszög szomszédos csúcsait jelölik) AC átlójának felezőpontja G, CE átlójának felezőpontja H, AD átlójának felezőpontja I. Hányadrésze az $ABCHIG$ hatszög területe az $ABCDEF$ hatszög területének? (A szabályos hatszög minden oldala egyenlő hosszú, és minden szöge egyenlő nagyságú.)

1. megoldás

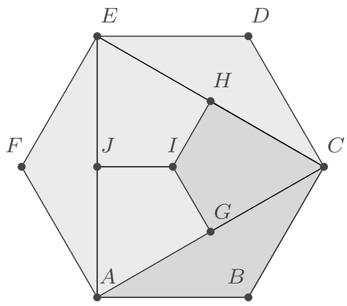
Az AC szakasz két részre bontja az $ABCHIG$ hatszöget: az ABC háromszögre és a $CHIG$ négyszögre. (*2 pont*)

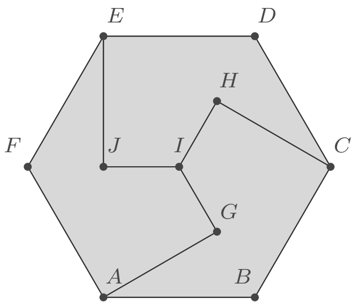
A hatszög szimmetriája miatt az ABC háromszöggel egybevágó a CDE és az EFA háromszög is, (*2 pont*)

és ha az AE szakasz felezőpontját J jelöli, a $CHIG$ négyszög egybevágó az $AGIJ$ és az $EJIH$ négyszöggel. (*2 pont*)

Ezek alapján a kérdezett arány 1/3. (*1 pont*)

Összesen: 7 pont



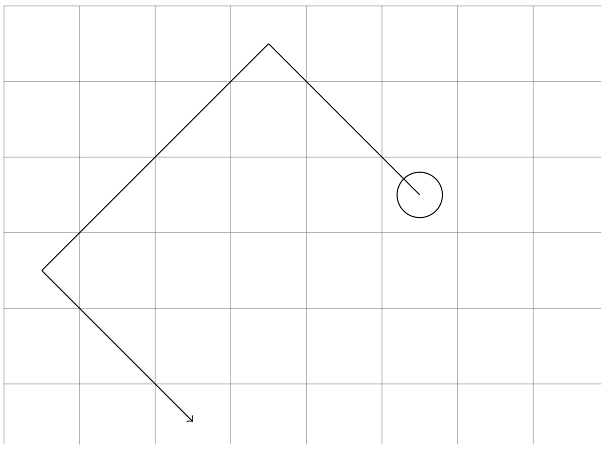


2. megoldás

Vegyük észre, hogy ha a kérdéses hatszöget elforgatjuk az I pont körül 120°-kal és 240°-kal, akkor ezek és az eredeti hatszög hézagmentesen és átfedés nélkül lefedi az $ABCDEF$ hatszöget. (***3** pont*)
Indoklás: legyen J az AE átló felezőpontja. Ekkor a 120°-os forgatásnál A képe C , B képe D, C képe E, G képe H, mert AC képe CE, és I képe I, tehát $ABCHIG$ képe $CDEJIH$. (***2** pont*)
Hasonlóan látható, hogy $ABCHIG$ hatszög 240°-os elforgatottja $EFAGIJ$, (***1** pont*)
tehát a kérdezett arány 1/3. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

3. Egy 10×100-as négyzetrács egy mezőjén egy futó áll. A futó a sakk szabályai szerint mozog átlós irányban, a tábla szélén egy biliárdgolyóhoz hasonlóan visszapattan. Van-e olyan mező, ahonnan indulva a futó be tud járni 500 mezőt?



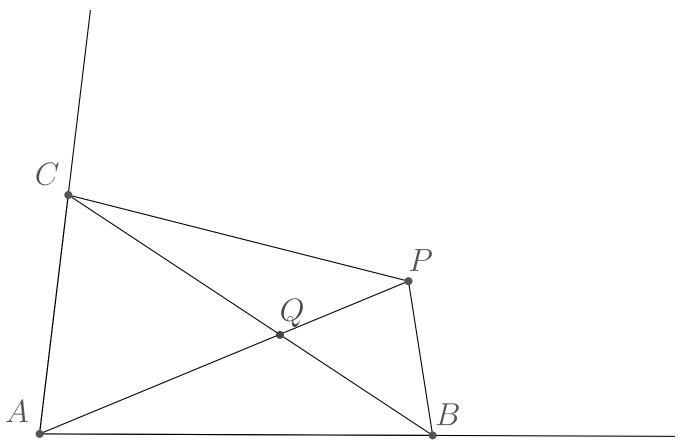
Megoldás

Színezzük ki sakktáblaszerűen a táblát. Világos, hogy a futó végig azonos színen mozog. Ha tehát a futó az 500 mezőt jár be, akkor valamelyik színből az összes mezőt bejárja. (***1** pont*)
Tegyük fel, hogy a bal alsó mező fekete. Ekkora a bal felső mező fehér. Ha tehát a futó valamelyik

színből az összeset bejárja, akkor járni fog a tábla egyik sarkában. Az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy ez mondjuk a bal alsó. (***1** pont*)
Ha a futó valamelyik mezőből indulva eljut a bal alsó sarokba, akkor ezt az utat visszafelé követve azt látjuk, hogy a bal alsó sarokból is el lehet jutni ehhez a mezőhöz. (***2** pont*)
A bal alsó mezőből elindulva 100 mezőt jár be a futó, mert a századikként érintett mező éppen a jobb felső. (***1** pont*)
Az eddigieket összefoglalva, ha amíg a futó eljut útja során a bal alsó sarokba, csak ezen 100 mezőn járhat, (***1** pont*)
és az útját a bal alsó sarokból folytatva szintén csak ezen a 100 mezőn járhat, ami bizonyítja, hogy nem járhat be a futó az útja során 500 mezőt. (***1** pont*)
Összesen: 7 pont

4. Adott az ABC háromszög síkjában, a háromszögön kívül egy P pont. Mutassuk meg, hogy lehet találni olyan Q pontot az ABC háromszög belsejében vagy kerületén, amelyre $AQ+BQ+CQ < AP+BP+CP$.akkor

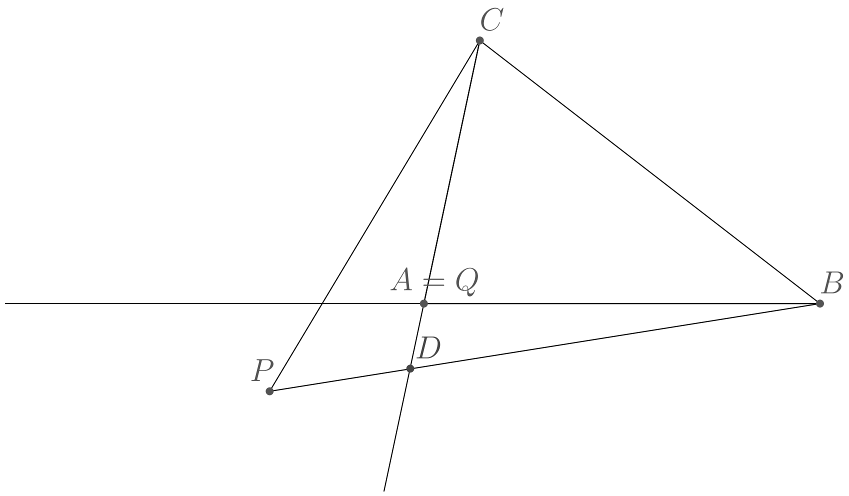
Megoldás
A háromszögön kívül lévő P pont vagy a háromszög egyik szögének szögtartományába esik (a háromszögön kívül, de a szögtartomány határát megengedve), vagy az egyik szöge csúcsszögének tartományába esik (a tartomány belsejébe). (***1** pont*)
Ha a háromszög egyik szögének tartományába, mondjuk az A csúcsnál lévő szög tartományává esik a P, kössük össze A-t és P-t, és nézzük meg, hol metszi el ez a szakasz a BC oldalt. Legyen ez a pont Q. Világos, hogy $AQ < AP$, és a háromszög-egyenlőtlenség alapján $BQ + CQ = BC < BP + CP$ (a P nem eshet a BC oldal egyenesére), így ezeket összeadva $AQ + BQ + CQ < AP + BP + CP$. (***3** pont*)



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Ha a háromszög egyik szöge csúcsszögének tartományába esik P, essen mondjuk az A csúcs csúcsszögének tartományába. Ekkor legyen $Q = A$. Hosszabbítsuk meg a CA szakaszt A-n túl, és ez messe a PB szakaszt a D pontban. A háromszög egyenlőtlenség alapján $DB+DA > BA = BQ$, azaz $DB + DC = DB + DA + AC > BQ + AC = BQ + CQ$, és $PD + PC > DC$, vagyis $BP + CP = PD + DB + PC > DB + DC > BQ + CQ$, és így kész vagyunk, mert $AQ = 0$.

(***3** pont*)



Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Egy másik lehetséges befejezés a második esetben: mivel $PAC\sphericalangle + PAB\sphericalangle > 180°$, így legalább az egyik tompaszög. Legyen mondjuk $PAC\sphericalangle > 90°$. Ekkor a PAC háromszögben az A csúccsal szemközti oldal lesz a leghosszabb, azaz $PC > AC$, a háromszög-egyenlőtlenség alapján pedig $PA + PB > AB$, és ezek összeadásával megkapjuk, hogy $Q = A$ jó választás.

5. Egy vízilabda-mérkőzést izgalmasnak mondunk, ha a meccs során egyik csapat sem vezetett két gólnál nagyobb különbséggel. Egy alkalommal a Magyarország–Szerbia mérkőzésen összesen 11 gól esett. Hányféle sorrendben eshettek a gólok, ha a meccs izgalmas volt? (Két sorrend különböző, ha van olyan sorszámú gól, amit nem ugyanaz a csapat szerzett az egyik sorrendben, mint a másikban.)

1. megoldás

Tegyük fel, hogy az első gólt a magyar csapat dobta. A következő két gól után vagy a magyar csapat fog egy góllal vezetni, vagy a szerb, az előbbire 2 lehetőség, az utóbbira 1 lehetőség van.

(***2** pont*)

A következő két gólra is fennáll ugyanez (vagy a fordítottja, ha a szerb csapat átvette a vezetést),

vagyis megint háromféle lehet ez a két gól. (***2*** *pont*)
Ez folytatható, és az összes olyan lejátszás izgalmas meccset fog eredményezni, ahol az első gól tetszőleges, de az ezután következő kétgólos csoportokban az éppen vezető csapat nem duplázik, (***2*** *pont*)
tehát a lehetőségek száma $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 486$. (***1*** *pont*)

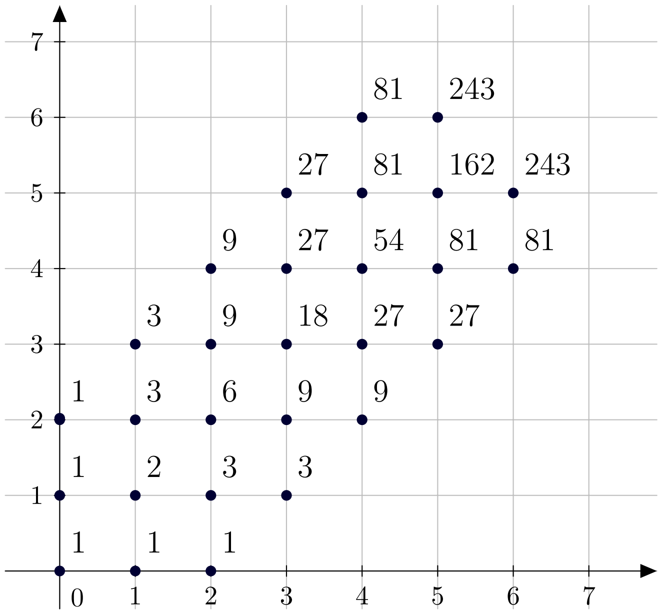
Összesen: 7 pont

2. megoldás
Először nézzük azt az esetet, ha a játék során nem volt döntetlen állás. Ekkor valamelyik csapat két góllal kezdett, aztán csak felváltva jöhettek a gólok, különben lett volna döntetlen vagy a két góllal kezdő csapat vezetett volna 3 góllal is, azaz így csak kétféle eset lehetséges. (***1*** *pont*)
Ha a játék során egy döntetlen állás volt, az előzőhöz hasonlóan látható, hogy a döntetlenig, majd a döntetlen után is kétféle lehetett a játék lefolyása. A döntetlen eredményt ötféle módon lehet megválasztani, ez tehát összesen 20 eset. (***2*** *pont*)
Ha a játék során két döntetlen állás volt, ezt a két döntetlen állást 10-féle módon tudom kiválasztani, majd a döntetlenek között, illetve az első döntetlenig és a második döntetlen után is kétféle lehetett a játék lefolyása, ez tehát 80 eset. (***2*** *pont*)
Hasonlóan látható, hogy 3 döntetlennél 160 eset, 4 döntetlennél 160 eset, 5 döntetlennél pedig 64 eset van. A lehetőségek száma tehát $2 + 20 + 80 + 160 + 160 + 64 = 486$. (***2*** *pont*)

Összesen: 7 pont

3. megoldás
A koordináta-rendszerben jelöljük be azokat a pontokat, melyek koordinátái a mérkőzés folyamán előfordulhattak mint részeredmények (ilyenek pl. a $(0; 0), (1; 0), (0; 1)$ stb. pontok). Minden ponthoz írjuk oda, hogy hányféleképpen következhetett be a neki megfelelő részeredmény. A kitöltési szabály értelemszerű, egy ponthoz írt érték megegyezik a tőle balra és lefelé lévő szomszédjához írt értékek összegével (ha csak egy szomszédja van, akkor azt az értéket írjuk hozzá is). Mivel a lehetséges végeredmények, a 6-5 és az 5-6, egyaránt 243-féleképpen következhet be, a végeredmény: 486.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014



Összesen: 7 pont

4. megoldás (vázlat)

Próbáljuk azt megszámolni, hogy hány rossz eset van, vagyis amikor valamelyik csapat vezetett a meccs során legalább 3 góllal.

Ha a meccs során volt 3-0 az eredmény, ez $2^9 = 512$ darab lehetőség: kiválasztjuk, melyik csapat dobott az elején 3 gólt, a maradék nyolc gól pedig tetszőleges. (***1** pont*)

Ha a meccs során 4-1 volt az első eredmény, amikor valamelyik csapat 3 góllal vezetett: az első 5 gólra adódó $2 \cdot \binom{5}{1}$ lehetőségből lejön $2 \cdot 2$: vagyis az első 5 gólra 6 lehetőség van. A maradék 6 gól tetszőleges, ez tehát $6 \cdot 2^6 = 384$ lehetőség. (***1** pont*)

Ha a meccs során 5-2 volt az első eredmény, amikor valamelyik csapat 3 góllal vezetett: az első 7 gólra adódó $2 \cdot \binom{7}{2}$ lehetőségből lejön $2 \cdot \binom{4}{2} + 6 \cdot 2$: vagyis az első hét gólra 18 lehetőség van. A maradék 4 gól tetszőleges, ez tehát $18 \cdot 2^4 = 288$ lehetőség. (***1** pont*)

Ha a meccs során 6-3 volt az első eredmény, amikor valamelyik csapat 3 góllal vezetett: az első 9 gólra adódó $2 \cdot \binom{9}{3}$ lehetőségből lejön $2 \cdot \binom{6}{3} + 6 \cdot \binom{4}{2} + 18 \cdot 2 + 2 \cdot 1$, vagyis az első 9 gólra 54 lehetőség van. A maradék 2 gól tetszőleges: ez tehát $54 \cdot 2^2 = 216$ lehetőség. (***1** pont*)

Végül ha a meccs 7-4-re végződött, de korábban egyik csapat sem vezetett 3 góllal, a $2 \cdot \binom{11}{4}$ esetből lejön $2 \cdot \binom{8}{4} + 6 \cdot \binom{6}{3} + 18 \cdot \binom{4}{2} + 54 \cdot \binom{2}{1} + 2 \cdot \binom{8}{1} + 6 \cdot \binom{6}{0}$, ami 162 lehetőség. (***2** pont*)

A végeredmény tehát $2048 - 512 - 384 - 288 - 216 - 162 = 486$. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.