TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

49. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló – 2020. szeptember 25.

HETEDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Héphaisztosz, Dionüszosz és Poszeidón összevesztek azon, hogy hármuk közül ki a legszebb, és ki a legokosabb. Az álláspontok a következők voltak:

   - Héphaisztosz: Poszeidón a legszebb. Én vagyok a legokosabb.
   - Dionüszosz: Héphaisztosz a legszebb. Én vagyok a legokosabb.
   - Poszeidón: Én vagyok a legszebb. Dionüszosz a legokosabb.

   Ki a legokosabb, és ki a legszebb valójában, ha tudjuk, hogy a legokosabb mindkét kérdésben az igazságnak megfelelően nyilatkozott, míg a legszebbnek mindkét állítása téves volt?

   Megoldás. A kérdésben megfogalmazott feltételből következik, hogy a legszebb és a legokosabb két különböző személy.

   A legokosabb ember azt fogja mondani, hogy ő maga a legokosabb. Ezért Poszeidón nem lehet a legokosabb.

   Ha Héphaisztosz lenne a legokosabb, akkor Poszeidón a legszebb, vagyis Poszeidón mindkét állítása hamis, de ez ellentmond annak, hogy Poszeidón a legszebb.

   Csak az a lehetőség maradt, hogy Dionüszosz a legokosabb, és így állítása alapján Héphaisztosz a legszebb. Ez összhangban van azzal, hogy a legszebb ember mindkét állítása hamis, hiszen Héphaisztosz mindkét állítása ellentmond az eddig rögzített tényeknek.

   Tehát Dionüszosz a legokosabb és Héphaisztosz a legszebb.

2. Hány olyan 2020-nál kisebb pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szorzata 20?

   Megoldás Fel kell bontanunk a 20-at legfeljebb négy darab egyjegyű szám szorzatára. Ha négy tényezőt használunk, akkor legalább az egyiknek egynek kell lennie, különben nem tudnánk 2020-nál kisebb négyjegyű számot összeállítani a számokból. Azt is láthatjuk, hogy a négyjegyű megoldásoknak 1-essel kell kezdődnie.

   Soroljuk fel a lehetséges felbontásokat, felhasználva, hogy $20 = 2^2 \cdot 5$:

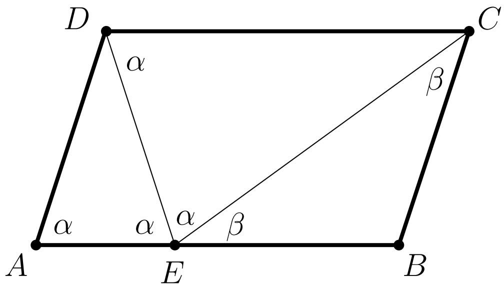
   - $20 = 5 \cdot 4$, a lehetséges számok: 45, 54

- $20 = 5 \cdot 4 \cdot 1$, a lehetséges számok: 145, 154, 415, 451, 514, 541
- $20 = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1$, a lehetséges számok: 1145, 1154, 1415, 1451, 1514, 1541
- $20 = 5 \cdot 2 \cdot 2$, a lehetséges számok: 225, 252, 522
- $20 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$, a lehetséges számok: 1225, 1252, 1522

Összesen 20 pozitív egész felel meg a feladat feltételeinek.

3. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának belsejében levő E pontra teljesül, hogy $AD = DE$, $DC = EC$ és $EB = BC$. Határozd meg a paralelogramma szögeit.

Megoldás. Készítsünk ábrát és legyen $DAB\sphericalangle = \alpha$.



$AD = DE$ miatt $DEA\sphericalangle = \alpha$. Mivel $DEA\sphericalangle$ és $EDC\sphericalangle$ váltószögek, ezért $EDC\sphericalangle = \alpha$.
$DC = EC$ miatt $DEC\sphericalangle = \alpha$ is teljesül.
Végül $EB = BC$ miatt $CEB\sphericalangle = ECB\sphericalangle = \beta$.

Az E pontnál egy egyenesszöget bontottunk három részre, így $2\alpha + \beta = 180°$.

Emiatt (használva a háromszög belső szögeinek összegére ismert értéket) $ADE\sphericalangle = DCE\sphericalangle = \beta$.

Most a paralelogramma szemközti szögeinek egyenlőségéből $\alpha = 2\beta$.

Visszatérve az ismert összegre $2\alpha + \beta = 180° \Rightarrow 4\beta + \beta = 180°$, innen $\beta = 36°$, ezért $\alpha = 72°$.

Tehát a paralelogramma szögei: 72°, 108°, 72°, 108°, felhasználva, hogy az azonos oldalon fekvő szögek 180 fokra egészítik ki egymást.

4. Egy 4×4-es táblázat sorait és oszlopait is megszámoztuk 1-től 4-ig. Ezután pöttyöket tettünk néhány mezőbe (egy mezőbe akár többet is) úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban összesen pontosan annyi pötty legyen, mint amennyi az adott sor, illetve oszlop sorszáma.
Hány mező maradhatott üresen? Adj példát minden lehetséges értékre, és indokold meg, hogy más érték miért nem lehetséges.

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Megoldás. Minden sorban van pötty, hiszen minden sorban pozitív az összeg. Ezért legalább négy mezőn kell legyen pötty, azaz legfeljebb tizenkét mező lehet üres.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Soronként összeszámolva azt kapjuk, hogy hogy összesen $1+2+3+4=10$ pöttyöt kell elhelyezni a táblázat mezőin. Ezért legfeljebb tíz mezőre juthat pötty, azaz legalább 6 mező üres.

Tehát az üres mezők száma legalább hat és legfeljebb tizenkettő. Ezen határok között mindegyik eset lehetséges, amint az alábbi példák mutatják.

A példákban pöttyöket nem rajzoltunk, ehelyett beírtuk az egyes mezőkbe, hogy hány pöttyöt tennénk oda.

1			
	2		
		3	
			4

(12 üres mező)

	1		
1	1		
		3	
			4

(11 üres mező)

		1	
1		1	
	2	1	
			4

(10 üres mező)

		1	
	1	1	
1	1	1	
			4

(9 üres mező)

			1
1			1
		2	1
	2	1	1

(8 üres mező)

			1
1			1
	1	1	1
	1	2	1

(7 üres mező)

			1
		1	1
	1	1	1
1	1	1	1

(6 üres mező)

5. Egy pozitív egész számot *váltakozó osztósorozatú*nak nevezünk, ha növekvő sorrendbe írva az összes osztóját, felváltva következnek a páros és páratlan számok. (Például a 42 váltakozó osztósorozatú, hiszen az osztói növekvő sorrendben: $1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42$.)

   (a) Adj meg egy váltakozó osztósorozatú számot, amelynek legalább 12 különböző osztója van.

   (b) Van-e 1-nél nagyobb váltakozó osztósorozatú négyzetszám?

Megoldás

Az (a) részre sokféle példa adható. Például $486 = 2 \cdot 3^5$ megfelelő szám. Ennek osztói nagyság szerinti sorrendben:

$$1 < 2 < 3 < 6 < 9 < 18 < 27 < 54 < 81 < 162 < 243 < 486.$$

A konstrukció lényege, hogy ha $x < 486$ egy páratlan osztó, akkor $x < 2x < 3x$, ahol $2x$ és $3x$ is osztó, és a $2x$ osztón kívül más osztó nem esik x és $3x$ közé.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

A $486 = 2 \cdot 3^5$ számhoz hasonlóan, minden $2 \cdot 3^k$ alakú szám (ahol $k \geq 5$), sőt minden $2 \cdot p^k$ alakú szám (ahol $k \geq 5$ és p egy páratlan prímszám) jó példát szolgáltat.

Egy másik jó példa: $1806 = 42 \cdot 43$. Ennek osztói nagyság szerinti sorrendben:

$$1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, 43, 86, 129, 258, 301, 602, 903, 1806.$$

Ezeb példa működésének kulcsa következő észrevétel: ha egy n páros szám váltakozó osztósorozatú, míg p egy n-nél nagyobb prímszám, akkor $p \cdot n$ is váltakozó osztósorozatú lesz. Ilyenkor ugyanis $p \cdot n$ osztóinak növekedő sorozata úgy állítható elő, hogy az n sorozatának végére odaírjuk mégegyszer ugyanezt a sorozatot, csak minden tagot p-szeresére növelve.

A két eddig bemutatott módszer ötvözésével kapható meg a legkisebb váltakozó osztósorozatú szám, amelynek legalább 12 osztója van. Ez a $342 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$, ennek osztói:

$$1, 2, 3, 6, 9, 18, 19, 38, 57, 114, 171, 342.$$

A (b) rész kérdésére a válasz: nincs.

Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Tegyük fel, hogy létezik 1-nél nagyobb nagyobb váltakozó osztósorozatú négyzetszám, ezt jelölje n. Világos, hogy n páros szám kell legyen, különben az összes osztója páratlan volna. Innen többféleképpen ellentmondáshoz tudunk jutni:

(1. gondolatmenet) Mivel n páros és négyzetszám, ezért osztható 4-gyel is. n növekedő osztósorozatának a vége így fog kinézni: $\ldots, \frac{n}{2}, n$. Ezek között már nem lehet egyéb osztó, hiszen n-t vele elosztva a hányados 1-nél nagyobb, de 2-nél kisebb lenne, nem lehetne egész. Mivel n osztható 4-gyel így $\frac{n}{2}$ és n egyaránt páros számok, nem teljesül a váltakozás. Ellentmondás.

(2. gondolatmenet) Mivel n páros és négyzetszám, ezért osztható 4-gyel is. Ekkor minden p páratlan osztójához p páratlan osztóhoz hozzárendelhetjük a $2p$ és $4p$ osztóit. Így minden páratlan osztóhoz két páros osztót rendeltünk hozzá (különböző páratlan számokhoz különböző párosakat), így legalább kétszer annyi páros osztója van n-nek, mint páratlan. Márpedig az 1-nél nagyobb váltakozó osztósorozatú számoknak nem lehet több páros osztója, mint páratlan, hiszen a növekvő sorozatban felváltva jönnek a páratlan és a páros osztók, és a sorozat első tagja páratlan. Ellentmondás.

(3. gondolatmenet) A négyzetszámoknak páratlan sok osztójuk van. (Ez az állítás közismert, a versenyen elfogadjuk külön bizonyítás nélkül. Megjegyezzük, hogy osztópárokkal a bizonyítás sem nehéz.) Mivel az n legkisebb osztója (az 1) páratlan és váltakozva következnek, ezért a növekvő sorrendben páratlanadik osztók mind páratlanok lesznek. De így a legnagyobb osztó, n maga is páratlan kell legyen. Ellentmondás.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal, Sándor András.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

Az NTP-TMV-19-0019. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.