TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

50. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló – 2021. április 23.

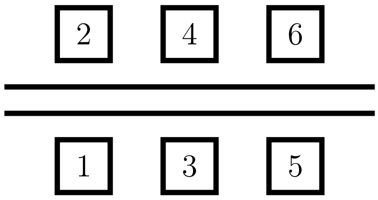
HATODIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Egy utca két oldalán hat ház áll, melyek az ábrán látható módon meg vannak 1-től 6-ig számozva. A hat házban lakik: Anna, Béla, Csaba, Dóra, Endre, Fanni. A következő állításokat tudjuk róluk:

   - Mindenki különböző házban lakik.
   - Minden fiúval szemben egy lány lakik.
   - Anna és Endre házszámainak összege Dóra házszámával egyenlő.
   - Dóra és Béla házszámainak összege Fanni házszámával egyenlő.

   Ki melyik házban lakik?



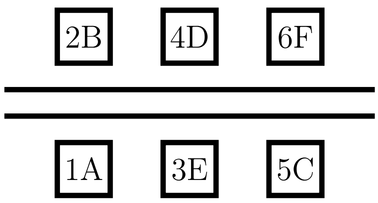
Megoldás. Ha lakók nevének kezdőbetűjével jelöljük a házszámukat, akkor $A+E=D$ és $D+B=F$, ahonnan $A+E+B=F$. Mivel a három legkisebb lehetséges házszám összege $1+2+3=6$, azaz a lehetséges legnagyobb házszám, ezért csak az lehet, hogy $F=6$, továbbá A, E és B az $1,2,3$ számú házban lakik, valamilyen sorrendben.

Anna nem lakhat 3-ban, mert akkor Béla és Endre egymással szemben lakna.

Béla sem lakhat a 3-ban, mert akkor $A+E=3$ miatt Dórának is ott kellene laknia. Tehát a 3-as házban Endre lakik.

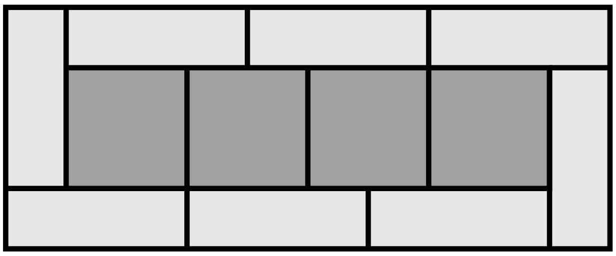
Béla az 1-esben sem lakhat, mert akkor $D+B=F$ miatt Dóra és Fanni egymással szemben laknának, így valamelyik fiúval szemben is fiúnak kellene.

Tehát Béla lakik a 2-esben, Anna az 1-esben, Dóra az $1+3=4$-esben, és Csabának marad az 5-ös. Ekkor valamennyi állítás igaz.



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. Nyolc egyforma téglalapból és négy egyforma négyzetből egy nagy téglalapot építettem, az ábrán látható elrendezésben.



Tudjuk, hogy a nagy téglalap kerülete 42 cm. Határozd meg a nagy téglalap területét.

Megoldás. Legyen a nyolc egyforma tégalap rövidebb oldala r, hosszabb oldala h hosszúságú.

A h hosszúság éppen egy négyzetoldallal több az r-nél, így $2h$ két négyzetoldallal több $2r$-nél, viszont $2h$ éppen három négyzetoldallal egyezik meg. Ezért $2r$ megegyezik egy négyzetoldallal.

A nagy téglalap oldalai $2r$-rel hosszabbak, mint a belső, 4 négyzetből álló téglalap oldalai. Így a nagytéglalap hosszabbik oldala 5, rövidebbik oldala 2, kerülete 14 négyzetoldal.

Mivel a kerület 42 cm, így egy négyzetoldal 3 cm, a nagy téglalap oldalai $5 \cdot 3 = 15$ cm és $2 \cdot 3 = 6$ cm, területe $15 \cdot 6 = 90$ cm^2.

3. a) Van-e olyan szám, amelyet fel lehet írni három különböző háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is, és négy különböző háromjegyű pozitív egész szám szorzataként is?
b) Van-e olyan szám, amelyet fel lehet írni három különböző négyjegyű pozitív egész szám szorzataként is, és négy különböző négyjegyű pozitív egész szám szorzataként is?

Megoldás. a) Van. A három tényező megtalálásához „nagy” háromjegyű számokkal érdemes kísérletezni. Egy lehetséges megoldás:

$$900 \cdot 800 \cdot 700 = 100 \cdot 120 \cdot 140 \cdot 300 = 504000000.$$

De ezenkívül sok más megoldás is található. Egy lehetséges módszer a megoldás keresésére, ha megnézzük a számok prímtényezős felbontását:

$$990 \cdot 960 \cdot 930 = (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 31$$

A fenti prímfelbontásban szereplő tényezőket fel lehet osztani négy csoportra úgy, hogy minden csoportban háromjegyű legyen a számok szorzata:

$$124 \cdot 125 \cdot 176 \cdot 324 = (2 \cdot 2 \cdot 31) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 31.$$

Tehát a $990 \cdot 960 \cdot 930 = 883872000$ szám megfelel a feltételnek.

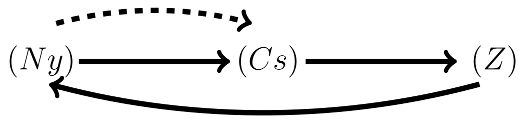
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

b) Nincs. Három négyjegyű szám szorzata kevesebb, mint

$$10000 \cdot 10000 \cdot 10000 = 1000000000000 = 10^{12}.$$

Négy négyjegyű szám szorzata viszont legalább $1000^4 = 10^{12}$.

4. Van egy autóm, amely központi zárral van felszerve. Ez háromféle állapotban lehet: (Z) állapotban zárva, (Ny) állapotban nyitva van az összes zár; míg (Cs) állapotban a csomagtartó nyitható, de az utastér nem. A zárhoz távirányító is tartozik, melyen egyetlen gomb van. Ennek megnyomásával a központi zár (Ny) állapotból (Cs)-be, (Cs)-ből (Z)-be míg (Z)-ből (Ny)-be kapcsol. Továbbá, ha a zár (Ny) állásban van és egy teljes percig nem történik gombnyomás, akkor a központi zár automatikusan (Cs) állásba kapcsolja magát.

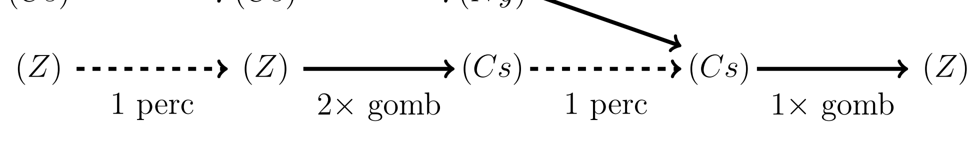


Sajnos nem emlékszem, hogy bezártam-e az autót, amikor a ház előtt hagytam. Nincs kedvem visszamenni a kocsihoz, de szerencsére a távirányító az ablakból is működik. Hogyan tudom elérni a lehető legkevesebb gombnyomással, hogy a központi zár biztosan (Z) állapotba kerüljön?
Az autó kezdetben bármelyik állapotban lehet és az ablakból nézve nem lehet megkülönböztetni az állapotokat.

Megoldás. 3 gomnyomással garantálni lehet, hogy a zár (Z) állapotba kerül, amennyiben az első gombnyomás előtt, illetve a második és harmadik gombnyomás között is várunk egy-egy percet.

Miért biztos, hogy ennek a végén (Z) állapotban lesz a zár?

Miután az elején vártunk 1 percet, a zár biztosan (Cs) vagy (Z) állapotban lesz. Ezután kétszer egymás után megnyomjuk a gombot, ezzel a zár (Ny) vagy (Cs) állapotba kerül, tehát további 1 perc várakozás után biztosan (Cs) állapotba kerül. Ha az 1 perc már biztosan letelt, akkor megnyomjuk még egyszer a gombot, és így (Z) állapotban lesz a zár.



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Tehát 3 gombnyomással megoldható a feladat. Most gondoljuk meg, hogy kevesebb gombnyomás miért nem elég. Erre kétféle gondolatmenetet is mutatunk.

Nyilván kell legalább egy gombnyomás, különben (Cs) állapotból nem tudnánk kimozdulni.

1. gondolatmenet. Ha csak egyszer nyomjuk meg a gombot, és kezdetben a zár (Z) állapotban volt, akkor a gombnyomás után (Ny) állapotba kerül, onnan 1 perc után (Cs)-be, de tovább már nem változik. Nem jutottunk el (Z)-be.

Ha kétszer nyomjuk meg a gombot, és a zár kezdetben (Cs) állapotban volt, akkor az első gombnyomás után (Z) állapotba kerül, a második gombnyomás után pedig (Ny)-be. Ezeket a változásokat nem befolyásolja az, hogy a gombnyomások között várakozunk-e. Innen 1 perc után automatikusan (Cs)-be fog kerülni, de tovább már nem változik. Tehát nem jutottunk el (Z)-be.

2. gondolatmenet. Nézzük meg, hogy a (Z) állapot esetén hány gombnyomás kell ahhoz, hogy újra (Z) állapotba kerüljön a kocsi. Könnyen látható, hogy 3-nál kevesebb gombnyomás esetén csak 0 vagy 2 nyomással oldható meg.

Ezzel szemben, ha kezdetben (Cs) állapotban voltunk, akkor csak pontosan 1 nyomással juthatunk a zárva állapotba. Vagyis nem lehetséges 3-nál kevesebb nyomásból biztosan bezárni az ajtót.

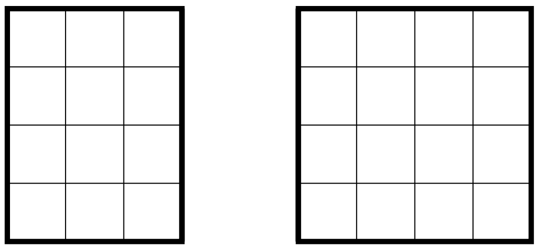
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Egy robot lépked egy táblázat mezőin. A lépései felváltva a következők:

- egy olyan mezőre lép át, amely az előzővel oldalszomszédos
- egy olyan mezőre lép át, amely az előzővel csúcsszomszédos, de nem oldalszomszédos

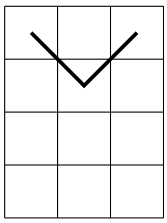
A robot szeretne egy olyan körsétát tenni a táblázaton, amely a táblázat összes mezőjét pontosan egyszer tartalmazza, és végül visszalép a kiindulási mezőre. Meg tudja-e tenni a robot, ha a táblázat

a) 3×4-es, b) 4×4-es?



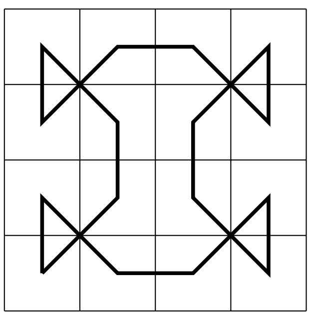
A robot tetszőleges mezőn kezdheti a sétát, és a kezdőlépés típusát is megválaszthatja.

Megoldás. a) Nem lehetséges. Vegyük az egyik sarkot és nézzük meg, hogy melyik az a két mező, amely a körsétán szomszédos ezzel a sarokkal. Mivel minden második lépés átlósan történt, ezért az egyik szomszédja az úton ettől a mezőtől átlósan helyezkedik el. Mivel egy saroknak csak egy átlós szomszédja van, ezért muszáj, hogy az a mező az úton szomszédja legyen a saroknak.



Ekkor a középső sor második mezőjéből két út is átlósan indul ki, vagyis lenne benne két egymás utáni átlós lépés, ami nem lehetséges.

b) Lehetséges, például:



A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201113/408. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.